

# Approximations discrètes de la densité d'états surfacique presque périodique

## 1 Énoncés des résultats

Soit  $d = d_1 + d_2$  avec  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ . On identifie  $x \in \mathbb{R}^d$  avec  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  avec le potentiel continu, presque périodique par rapport  $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$  et décroissant suffisamment rapidement en variable  $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ . Plus précisément soit  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  l'espace des fonctions continues presque périodiques  $\mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{C}$ , défini comme le plus petit sous-espace fermé de  $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$  contenant toutes les fonctions exponentielles  $\{x_1 \rightarrow e^{i\gamma \cdot x_1}\}_{\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}}$  et soit  $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction vérifiant les hypothèses

(H1) il existe  $\delta_0 > 0$  et  $C > 0$  tel que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  on ait

$$|v(x_1, x_2)| \leq C(1 + |x_2|)^{-d_2 - \delta_0} \quad (1.1)$$

(H2) la formule  $x_2 \rightarrow v(\cdot, x_2)$  définit l'application continue  $\mathbb{R}^{d_2} \rightarrow CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ , où  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  est défini comme au dessus avec la norme héritée de  $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ .

Sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^d)$  on considère l'opérateur auto-adjoint

$$H = -\Delta + V, \quad (1.2)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace et

$$(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.2')$$

Si  $Z \subset \mathbb{R}^d$  alors  $\chi_Z : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$  désigne la fonction caractéristique de  $Z$  et pour  $L, L' > 0$  soit  $\chi_L^{L'}$  l'opérateur défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par

$$(\chi_L^{L'} \varphi)(x) = \chi_{[-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.3)$$

Alors il est bien connu que pour toute fonction test  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  les opérateurs  $\chi_L^{L'} f(-\Delta)$  et  $\chi_L^{L'} f(H)$  appartiennent à la classe d'opérateurs à trace sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et on peut introduire

$$N_L^{L'}(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \chi_L^{L'}(f(H) - f(-\Delta)). \quad (1.4)$$

Dans la Section 3 on donnera la preuve de

**Théorème 1.1** *On suppose que le potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $H$  vérifie les hypothèses (H1) et (H2). Alors pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^L(f, H). \quad (1.5)$$

La distribution  $f \rightarrow N(f, H)$  s'appelle la densité surfacique d'états de  $H$  et on donnera la preuve du fait qu'elle est la limite des densités surfaciques d'états des opérateurs aux différences finies  $H^h$  agissant sur le réseau  $h\mathbb{Z}^d = \{hn \in \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{Z}^d\}$  de taille  $h \in ]0; 1]$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Plus précisément soit  $l^2(h\mathbb{Z}^d)$  l'espace de Hilbert dont les éléments sont les applications  $\varphi : h\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\|\varphi\|_h = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\varphi(hn)|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (1.6)$$

et dont le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle \varphi, \psi \rangle_h = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \varphi(hn) \overline{\psi(hn)}. \quad (1.6')$$

Alors le laplacien discret agit sur  $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$  selon la formule

$$(\Delta^h \varphi)(hn) = \sum_{j=1}^d \frac{\varphi(hn + he_j) - 2\varphi(hn) + \varphi(hn - he_j)}{h^2}, \quad (1.7)$$

où  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  et soit

$$H^h = -\Delta^h + V^h, \quad (1.8)$$

où  $V^h$  est défini à l'aide du potentiel  $v$  par la formule

$$(V^h \varphi)(hn) = v(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (1.8')$$

Par analogie au cas continu on définit

$$N_L^{L'}(f, H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^d : hk \in [-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \delta_{hk}, \delta_{hk} \rangle_h, \quad (1.4')$$

où  $\delta_{hk}(hn) = 0$  si  $n \neq k$  et  $\delta_{hk}(hk) = 1$ . Alors on a

**Théorème 1.2** *On suppose que  $H^h$  est donné par (1.8) avec  $v$  vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Alors pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^L(f, H^h). \quad (1.9)$$

De plus pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (1.9')$$

En ce qui concerne les preuves présentées dans la suite, les résultats de Théorème 1.1 et 1.2 concernant la famille des pavés  $[-L; L]^d$  seront obtenus grâce à l'étude des pavés  $[-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}$ . En particulier on prouvera

**Théorème 1.3** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $L' \geq 1$ . Alors les limites*

$$N^{L'}(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H), \quad N^{L'}(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H^h) \quad (1.10)$$

*existent et pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que*

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N^{L'}(f, H^h) - N_L^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (1.10')$$

*De plus il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $L' \geq 1$  on ait*

$$|N^{L'}(f, H) - N(f, H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \quad (1.11)$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |N^{L'}(f, H^h) - N(f, H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \quad (1.11')$$

Il est également possible de retrouver  $N(f, H)$  et  $N(f, H^h)$  utilisant le procédé suivant

**Théorème 1.4** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $L \geq 1$ . Alors les limites*

$$N_L(f, H) = \lim_{L' \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H), \quad N_L(f, H^h) = \lim_{L' \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H^h) \quad (1.12)$$

*existent et on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que pour  $L, L' \geq 1$  on ait*

$$|N_L^{L'}(f, H) - N_L(f, H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \quad (1.12')$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |N_L^{L'}(f, H^h) - N_L(f, H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \quad (1.12'')$$

*Si l'opérateur  $\chi_L^\infty$  est défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par la formule*

$$(\chi_L^\infty \varphi)(x) = \chi_{[-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.13)$$

*alors  $\chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta))$  appartient à la classe d'opérateurs à classe sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et on a les expressions*

$$N_L(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta)), \quad (1.14)$$

$$N_L(f, H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^d; h k \in [-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \delta_{hk}, \delta_{hk} \rangle_h, \quad (1.14')$$

*où la série (1.14') converge absolument. De plus on a*

$$N(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L(f, H), \quad N(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L(f, H^h) \quad (1.15)$$

*et pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que*

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N_L(H^h, f) - N(H^h, f)| < \varepsilon. \quad (1.15')$$

Enfin dans la Section 4 on prouvera

**Théorème 1.5** *Pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  on a*

$$N(f, H) = \lim_{h \rightarrow 0} N(f, H^h). \quad (1.16)$$

Le résultat du Théorème 1.5 permet d'obtenir

**Théorème 1.6** (a) On désigne par  $\text{supp } N(\cdot, H)$  (respectivement  $\text{supp } N(\cdot, H^h)$ ) le support de la distribution  $f \rightarrow N(f, H)$  (respectivement  $f \rightarrow N(f, H^h)$ ). Alors

$$\text{supp } N(\cdot, H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\text{supp } N(\cdot, H^h), \lambda) = 0\}. \quad (1.17)$$

(b) On désigne par  $\sigma(H)$  (respectivement  $\sigma(H^h)$ ) le spectre de l'opérateur  $H$  (respectivement  $H^h$ ). Alors

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\sigma(H^h), \lambda) = 0\}. \quad (1.18)$$

(c) On a

$$\sigma(H^h) \cap ]-\infty; 0[ = \text{supp } N(\cdot, H^h) \cap ]-\infty; 0[, \quad (1.19)$$

$$\sigma(H) \cap ]-\infty; 0[ = \text{supp } N(\cdot, H) \cap ]-\infty; 0[. \quad (1.19')$$

On peut remarquer que l'assertion (a) du Théorème 1.6 résulte immédiatement du Théorème 1.5 et l'assertion (b) résulte des propriétés obtenues au cours de la preuve du Théorème 1.5. Ensuite (1.19) a été démontré par Charour [??] et utilisant (1.19) avec (1.17), (1.18) on obtient (1.19').

## 2 Idées de base

Soit  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et soit  $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  l'idéal des opérateurs à trace. Si  $(e_j)_{j \in J}$  est une base orthonormée de l'espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  (c'est-à-dire  $J$  est dénombrable), alors par définition  $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \sum_{j \in J} |\langle Ae_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}}| < \infty$  et

$$\text{tr}_{\mathcal{H}} A = \sum_{j \in J} \langle Ae_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour } A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}). \quad (2.1)$$

Si  $p \geq 1$  alors par définition  $A \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (A^* A)^{p/2} \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  et

$$\|A\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H})} = \left( \text{tr}_{\mathcal{H}} (A^* A)^{p/2} \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

On abrège

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \mathcal{B}^h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \mathcal{B}_p^h = \mathcal{B}_p(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \quad (2.3')$$

$$\mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} A = \mathrm{tr} A, \quad \mathrm{tr}_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} A^h = \mathrm{tr}^h A^h. \quad (2.3'')$$

En introduisant l'opérateur  $\chi_L^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$  défini par

$$(\chi_L^{h,L'} \varphi)(hn) = \chi_{[-L; L[^{d_1} \times [-L'; L'^{d_2}}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d) \quad (2.4)$$

et utilisant le fait que  $(\delta_{hk})_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est une base orthonormée de  $l^2(h\mathbb{Z}^d)$  on trouve l'expression

$$N_L^{L'}(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \mathrm{tr}^h \chi_L^{h,L'}(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \quad (2.5)$$

Dans la suite on considère le pavé unité  $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0; 1[^d\}$  pour  $y \in \mathbb{R}^d$  et on définit  $\chi_y \in \mathcal{B}$ ,  $\chi_y^h \in \mathcal{B}^h$  par

$$(\chi_y \varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (2.6)$$

$$(\chi_y^h \varphi)(hn) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.6')$$

Soit  $\mathcal{K}$  un ensemble (à préciser plus tard) et on suppose que  $v_\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  est réelle pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ . On va étudier les opérateurs auto-adjoints

$$H_\kappa = -\Delta + V_\kappa, \quad H_\kappa^h = -\Delta^h + V_\kappa^h \quad (2.7)$$

$$(V_\kappa \varphi)(x) = v_\kappa(x) \varphi(x), \quad (V_\kappa^h \varphi)(hn) = v_\kappa(hn) \varphi(hn). \quad (2.7')$$

L'énoncé du résultat clé pour la suite est le suivant

**Proposition 2.1** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $(H_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$  donnés par (2.7).*

*(a) On suppose qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que*

$$\|V_\kappa\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v_\kappa(x)| \leq C_0 \quad (2.8)$$

*pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\chi_y f(H_\kappa)\|_{\mathcal{B}_1} + \|\chi_y^h f(H_\kappa^h)\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C \quad (2.9)$$

*pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .*

(b) Soit  $\delta \geq 0$ . On suppose

$$M_{\delta, \kappa, \kappa'} = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d} (1 + |x_2|)^\delta |v_\kappa(x_1, x_2) - v_{\kappa'}(x_1, x_2)| < \infty. \quad (2.10)$$

Alors il existe  $C_\delta > 0$  telle que

$$|y_2|^\delta \|\chi_{(y_1, y_2)}(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))\chi_{(y_1, y_2)}\|_{\mathcal{B}_1} \leq C_\delta M_{\delta, \kappa, \kappa'}, \quad (2.11)$$

$$|y_2|^\delta \|\chi_{(y_1, y_2)}^h(f(H_\kappa^h) - f(H_{\kappa'}^h))\chi_{(y_1, y_2)}^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_\delta M_{\delta, \kappa, \kappa'} \quad (2.11')$$

pour tout  $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .

Alors la Proposition 2.1 implique

**Corollaire 2.2** (a) Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$\sup_{L \geq 1} |N_L^{L_1}(f, H) - N_L^{L_2}(f, H)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}), \quad (2.12)$$

$$\sup_{L \geq 1} \sup_{0 < h \leq 1} |N_L^{L_2}(f, H^h) - N_L^{L_1}(f, H^h)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}). \quad (2.12')$$

(b) Les Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 résultent du Théorème 1.3.

(c) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $L, L' \geq 1$  on ait

$$\sup_{0 < \rho \leq 1} |N_{L+\rho}^{L'}(f, H) - N_L^{L'}(f, H)| \leq CL^{-1}, \quad (2.13)$$

$$\sup_{0 < \rho \leq 1} \sup_{0 < h \leq 1} |N_{L+\rho}^{L'}(f, H) - N_L^{L'}(f, H)| \leq CL^{-1}. \quad (2.13')$$

*Preuve.* (a) On suppose  $L_2 > L_1$ . Alors

$$N_L^{L_2}(f, H^h) - N_L^{L_1}(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \text{tr}^h(\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1})(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \quad (2.14)$$

On introduit

$$\Lambda(L, L_1) = (\mathbb{Z}^{d_1} \cap [-L; L]^{d_1}) \times (\mathbb{Z}^{d_2} \setminus [-(L_1 - 1); L_1 - 1]^{d_2}) \quad (2.15)$$

et on remarque que

$$\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1} = \sum_{y \in \Lambda(L, L_1)} \chi_y^h(\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1}). \quad (2.16)$$

Cependant utilisant Proposition 2.1 avec  $V_\kappa^h = V^h$ ,  $V_{\kappa'}^h = 0$  on voit que  $M_{\delta,\kappa,\kappa'} < \infty$  avec  $\delta = 0$  et  $\delta = d_2 + \delta_0$  et (2.11') permet d'estimer

$$\left| \text{tr}^h \chi_{(y_1, y_2)}^h (\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1}) (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \right| \leq C(1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0},$$

donc la valeur absolue de (2.14) est majorée par

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{\{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} : |y_2| \geq L_1 - 1\}} C(1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0} \leq C_1 L_1^{-\delta_0}.$$

(b) D'abord on va vérifier que le Théorème 1.2 résulte du Théorème 1.3 et du Corollaire 2.2(a). Pour obtenir l'assertion du Théorème 1.2 on doit montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (2.17)$$

Soit  $C_0 > 0$  la constante du Corollaire 2.2(a) et  $L'_\varepsilon$  tel que  $C_0 L'^{-\delta_0}_\varepsilon < \varepsilon/8$ . Ensuite l'assertion du Théorème 1.3 permet de trouver  $L_\varepsilon \geq L'_\varepsilon$  et  $h_\varepsilon > 0$  tels que

$$\begin{aligned} L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon &\Rightarrow |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \leq \\ &|N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_2}^{L_\varepsilon}(f, H^h)| + |N_{L_2}^{L_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_\varepsilon}(f, H^h)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

pour  $0 < h < h_\varepsilon$ . Ainsi (2.18) et (2.12') impliquent

$$\begin{aligned} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| &\leq |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| + \\ &\sum_{1 \leq k \leq 2} |N_{L_k}^{L_k}(f, H^h) - N_{L_k}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_0(2L_\varepsilon^{-\delta_0} + L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}) < \varepsilon \end{aligned}$$

pour  $L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon$ ,  $0 < h < h_\varepsilon$  et il est clair que l'assertion du Théorème 1.1 s'obtient du Théorème 1.3 et du Corollaire 2.2(a) de manière analogue. En ce qui concerne Théorème 1.4, il est évident que l'assertion du Corollaire 2.2(a) implique l'existence des limites (1.12) et les estimations (1.12'), (1.12''). Ensuite pour justifier  $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty \in \mathcal{B}_1$  on remarque que la suite  $((f(H) - f(-\Delta))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$  est Cauchy dans  $\mathcal{B}_1$  et sa limite dans  $\mathcal{B}_1$  coïncide avec  $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty$  car  $\lim_{L' \rightarrow \infty} \|\chi_L^\infty \varphi - \chi_L^{L'} \varphi\| = 0$  pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . De la même manière on trouve que  $((f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{B}_1$  vers  $(f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{h, \infty}$ , où

$$(\chi_L^{h, \infty} \varphi)(hn) = \chi_{[-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.19)$$



Ainsi on a

$$N_L(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^{h,\infty}(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \quad (2.20)$$

et par conséquent la série (2.14') converge absolument. Finalement pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L'_\varepsilon > 0$  tel que

$$L \leq L'_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h \leq 1} \sup_{L \geq 1} |N_L(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| \leq C_0 L'^{-\delta_0} < \varepsilon/2,$$

donc (1.15'') résulte de (1.9').

(c) Soit  $\Lambda'(L) = \mathbb{Z}^{d_1} \cap ([-(L+2); L+2]^{d_1} \setminus [-(L-1); L-1]^{d_1})$ . Alors

$$\chi_{L+\rho}^{h,L'} - \chi_L^{h,L'} = \sum_{y \in \Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2}} \chi_y^h (\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1}) \quad (2.21)$$

et compte tenu du fait que  $\operatorname{card} \Lambda'(L) \leq C_0 L^{d-1}$  on a peut estimer le membre gauche de (1.13') par

$$\begin{aligned} & C_1 L^{-1} \sup_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} \|\chi_{(y_1, y_2)}(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \chi_{(y_1, y_2)}\|_{\mathcal{B}_1} \\ & \leq C_2 L^{-1} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} (1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0} \leq C L^{-1}. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Corollaire 2.3** *Pour prouver Théorème 1.5 il suffit de montrer que pour toute fonction  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tr}^h \Theta^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) = \operatorname{tr} \Theta(f(H) - f(-\Delta)), \quad (2.22)$$

où  $\Theta$  et  $\Theta^h$  sont les opérateurs de multiplication

$$(\Theta\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (2.23)$$

$$(\Theta^h\varphi)(hn) = \theta(hn)\varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.23')$$

*Preuve.* L'assertion du Théorème 1.4 sera démontrée si on montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (2.24)$$

Soit  $C_0 > 0$  la constante du Corollaire 2.2(a) et  $L_\varepsilon$  tel que  $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} < \varepsilon/8$ . Ensuite pour  $L > 0$  on peut choisir  $\theta_L \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $0 \leq \theta_L \leq 1$ ,  $\theta_L = 1$  sur  $[-L; L]^d$  et  $\text{supp } \theta_L \subset [-L-1; L+1]^d$ . On introduit les opérateurs  $\Theta_L$  et  $\Theta_L^h$  définis par

$$(\Theta_L \varphi)(x) = \theta_L(x) \varphi(x) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$(\Theta_L^h \varphi)(hn) = \theta_L(hn) \varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$$

et on montre qu'il est possible de choisir  $L_\varepsilon$  tel que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - \text{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h))| < \varepsilon/4, \quad (2.25)$$

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_L^L(f, H) - \text{tr } \Theta_L(f(H) - f(-\Delta))| < \varepsilon/4. \quad (2.25')$$

En effet pour obtenir (2.24) on remarque que

$$\Theta_L^h - \chi_L^{h,L} = \sum_{y \in \Lambda(L,L) \cup (\Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2})} \chi_y^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L})$$

où  $\Lambda(L, L)$  et  $\Lambda'(L)$  sont comme dans la preuve du Corollaire 2.2. Alors de la même manière on trouve

$$\sum_{y \in \Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2}} |\text{tr}^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L}) \chi_y^h (f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_0 L^{-\delta_0},$$

$$\sum_{y \in \Lambda(L,L)} |\text{tr}^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L}) \chi_y^h (f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_1 L^{-1}$$

et (2.25) est assuré si  $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} + C_1 L_\varepsilon^{-1} < \varepsilon/4$ . De manière analogue on obtient (2.25') et pour terminer la preuve de (2.24) il suffit de remarquer que (2.22) assure l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h < h_\varepsilon} |\text{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) - \text{tr } \Theta_L(f(H) - f(-\Delta))| < \varepsilon/2. \quad \triangle$$

**Lemme 2.4** Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_2}$ ,  $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$  pour  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$  tels que

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} v_{\varepsilon,k}(x_2) e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon.$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \varphi_1)(hn_1) = e^{ihn_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(hn_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k}^h \varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2) \varphi_2(hn_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in h^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $w_\varepsilon(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) \theta_\varepsilon(x_2)$  où  $\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$  est choisie telle que  $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$  et  $|v(x) - w_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ensuite on remarque que pour tout  $\varepsilon' > 0$  il existe  $\delta' > 0$  tel que

$$|x_2 - x'_2| < \delta' \Rightarrow \sup_{x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}} |w_\varepsilon(x_1, x_2) - w_\varepsilon(x_1, x'_2)| < \varepsilon'$$

et utilisant p. ex. les formules de polynômes de Bernstein on peut trouver les coefficients  $c_{N,y_2,\nu,\varepsilon} \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $x_2 \in \text{supp } \theta_\varepsilon$  on ait

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \text{supp } \theta_\varepsilon \\ \{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} : |\nu| \leq 2d_1 N(\varepsilon)\}}} v(x_1, y_2/N(\varepsilon)) c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

si  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  est choisi suffisamment grand.

Pour terminer la preuve on remarque que  $v(\cdot, N(\varepsilon)^{-1}y_2) \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  permet de trouver  $N'(\varepsilon)$  et  $c_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{R}^{d_1}$  pour  $k = 1, \dots, N'(\varepsilon)$  tels que

$$\left| w_\varepsilon(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \text{supp } \theta_\varepsilon \\ 1 \leq k \leq N'(\varepsilon)}} c_{\varepsilon,k,y_2} e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k,y_2}} v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) = \sum_{\{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} : |\nu| \leq 2d_1 N(\varepsilon)\}} c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \theta_\varepsilon(x_2). \quad \triangle$$

### 3 Preuve de Théorèmes 1.1-1.4

La preuve est basée sur l'étude de la famille d'opérateurs  $(H_z)_{z \in \mathbb{R}^{d_1}}$  définis sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par la formule

$$H_z = -\Delta + V_z, \quad (3.1)$$

$$(V_z \varphi)(x) = v(x_1 + z, x_2) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (3.1')$$

On commence par l'énoncé du résultat clé de cette section :

**Proposition 3.1** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $L' \in \mathbb{N}$  et  $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ . On pose*

$$u_{y_1}^{L'}(z) = \sum_{y_2 \in \llbracket -L'; L' \rrbracket^{d_2}} \text{tr } \chi_{(y_1, y_2)}(f(H_z) - f(-\Delta)), \quad (3.2)$$

où  $\llbracket -L'; L' \rrbracket = \mathbb{Z} \cap [-L'; L']$ . Alors  $u_{y_1}^{L_0} \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ .

Preuve du fait que Proposition 3.1 implique Théorème 1.1

Soit  $T_{(z,0)}$  l'opérateur de la translation,  $(T_{(z,0)}\varphi)(x) = \varphi(x_1 - z, x_2)$ . Alors

$$H = T_{(z,0)} H_z T_{(-z,0)}, \quad \chi_{(y_1, y_2)} = T_{(y_1,0)} \chi_{(y_1, y_2)} T_{(-y_1,0)}, \quad (3.3)$$

$$\text{tr } T_{(-y_1,0)} \chi_{(0, y_2)} f(H_{y_1}) T_{(y_1,0)} = \text{tr } \chi_{(y_1, y_2)} f(H) \quad (3.4)$$

et il est clair que

$$u_{y_1}^{L'}(0) = u_0^{L'}(y_1). \quad (3.5)$$

Ainsi notant par  $[L]$  la partie entière de  $L$  on peut écrire

$$(2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} u_0^{L'}(y_1) = N_{[L]}^{L'}(f, H), \quad (3.6)$$

et compte tenu du Corolaire 2.2 il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H) - N_{L_2}^{L'}(f, H)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Soit  $C_1$  la constante de l'assertion du Corolaire 2.2(c) et soit  $L_\varepsilon \geq \varepsilon/(4C_1)$ . Alors pour obtenir (3.7) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]}^{L'}(f, H) - N_{[L_2]}^{L'}(f, H)| < \varepsilon/2. \quad (3.8)$$

Par définition de  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $c_{\varepsilon,k} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  tels que l'on ait

$$|u_0^{L'}(z) - u_\varepsilon^{L'}(z)| < \varepsilon/8 \quad (3.9)$$

avec

$$u_\varepsilon^{L'}(z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} e^{iz\gamma_{\varepsilon,k}}. \quad (3.10)$$

Alors il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction

$$N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} u_\varepsilon^{L'}(y_1) \quad (3.11)$$

possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$ . En effet, la condition de Cauchy pour  $L \rightarrow N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H)$  assure l'existence de  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon,[L_2]}^{L'}(f, H) - N_{\varepsilon,[L_1]}^{L'}(f, H)| < \varepsilon/4 \quad (3.12)$$

et (3.9) permet d'estimer

$$|N_{[L]}^{L'}(f, H) - N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H)| \leq \varepsilon/8 \quad (3.13)$$

pour  $L = L_1$  et  $L = L_2$ , donc l'inégalité triangulaire implique (3.8).

Il reste à justifier que pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}$  la fonction

$$L \rightarrow N_{[L]}(\gamma) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} e^{iy_1\gamma} \quad (3.14)$$

possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$ . Cependant dans le cas  $\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$ , l'assertion est évidente car

$$|1 - N_{[L]}(\gamma)| = |1 - (2[L])^{-d_1} \text{card } \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}| \leq C/L \rightarrow 0 \quad \text{quand } L \rightarrow \infty.$$

Il reste à étudier le cas  $\gamma = (\gamma(1), \dots, \gamma(d_1)) \notin 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$ . Si  $j_0 \in \{1, \dots, d\}$  est tel que  $\gamma(j_0) \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , alors utilisant

$$\left| \sum_{\nu=-L}^{L-1} e^{i\nu\gamma(j_0)} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\gamma(j_0)} - 1|} \quad (3.15)$$

et  $|N_{[L]}(\gamma)| = \prod_{j=1}^{d_1} \left| \frac{1}{2[L]} \sum_{\nu=-L}^{L-1} e^{i\nu\gamma(j)} \right| \leq 2L^{-1} |e^{i\gamma(j_0)} - 1|^{-1} \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

Avant de commencer la preuve de Proposition 3.1 on va introduire des notations auxiliaires. Si  $\mathcal{A}$  est un espace de Banach, alors  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  désigne l'ensemble des applications  $\Phi : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathcal{A}$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}$  ( $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi(z) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}}\|_{\mathcal{A}} < \varepsilon. \quad (3.16)$$

On remarque que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  est un espace de Banach avec la norme

$$\|\Phi\|_{\infty} = \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi(z)\|_{\mathcal{A}}. \quad (3.17)$$

**Lemme 3.2** *Si  $V_z$  est donné par (3.1'), alors la fonction  $z \rightarrow V_z$  appartient à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$ .*

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on a  $\|V - V_{0,\varepsilon}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$  avec  $V^{0,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V_{\varepsilon,k}$ , où  $V_{\varepsilon,k}$  désigne l'opérateur de multiplication par  $v_{\varepsilon,k}(x) = e^{i\gamma_{\varepsilon,k} \cdot x_1} \tilde{v}_{\varepsilon,k}(x_2)$  comme dans la Section 2. Alors

$$V_{z,\varepsilon} = T_{(z,0)}^{-1} V_{0,\varepsilon} T_{(z,0)} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}} \quad (3.17)$$

et on a  $\|V_z - V_{z,\varepsilon}\|_{\mathcal{B}} = \|T_{(z,0)}^{-1}(V - V_{0,\varepsilon})T_{(z,0)}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ .  $\triangle$

**Lemme 3.3** *Soit  $p \geq 1$ . Alors  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal bilatéral de l'algèbre de Banach  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$ . Si  $\Phi_j \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_{p_j})$  pour  $j = 1, 2$ , alors on a  $\Phi_1 \Phi_2 \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  avec  $p = p_1 p_2 / (p_1 + p_2)$ .*

*Preuve.* Si  $\Phi_j \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_{p_j})$  et  $\varepsilon > 0$ , alors on peut trouver  $N(\varepsilon)$  et  $A_{\varepsilon,k,j} \in \mathcal{B}_{p_j}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k,j} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\Phi_{\varepsilon,j}(z) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k,j} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k,j}} \quad (3.18)$$

vérifie  $\|\Phi_j(z) - \Phi_{\varepsilon,j}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_j}} < \varepsilon(1 + \|\Phi_1\|_{\infty} + \|\Phi_2\|_{\infty})^{-1}$ . Puisque

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \implies \|A_{\varepsilon,k,1} A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_{p_2}}, \quad (3.19)$$

on peut trouver  $N_\varepsilon$  et  $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}_p$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 1, \dots, N_\varepsilon$ ) tels que

$$\Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} A_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}} \quad (3.18')$$

et on peut estimer  $\|\Phi_1(z)\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z)\|_{\mathcal{B}_p}$  par

$$\begin{aligned} & \|(\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z))\Phi_2(z)\|_{\mathcal{B}_p} + \|\Phi_{\varepsilon,1}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z))\|_{\mathcal{B}_p} \leq \\ & \|\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|\Phi_2(z)\|_{\mathcal{B}_{p_2}} + \|\Phi_{\varepsilon,1}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit  $\Phi_1\Phi_2 \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  et il est évident qu'en remplaçant  $\mathcal{B}_{p_j}$  par  $\mathcal{B}$  dans ce raisonnement on trouve que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$  est une algèbre. Enfin utilisant le raisonnement analogue avec

$$\|A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \quad (3.20)$$

on trouve que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal à gauche et pareillement

$$\|A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}_p} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}} \quad (3.20')$$

permet de trouver que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal à droite.  $\triangle$

On utilisera le résultat suivant

**Proposition 3.4** *Soit  $\lambda_0 \geq 1 + 2\|V\|_{\mathcal{B}}$  et pour  $m \in \mathbb{N}^*$  on pose*

$$R_z^m = (-\Delta + V_z + \lambda_0 I)^{-m}, \quad (R_z^h)^m = (-\Delta^h + V_z^h + \lambda_0 I)^{-m}. \quad (3.21)$$

*Si  $p \geq \max\{m, 1 + \frac{d}{2}\}$  et  $N \in \mathbb{N}$ , alors on peut trouver des constantes  $C_{N,m} > 0$  telles que l'on ait*

$$\|\chi_y R_z^m\|_{\mathcal{B}_{p/m}} + \|\chi_y^h (R_z^h)^m\|_{\mathcal{B}_{p/m}^h} \leq C_{0,m}, \quad (3.22)$$

$$\|\chi_y R_z^m \chi_{y'}\|_{\mathcal{B}_{p/m}} + \|\chi_y^h (R_z^h)^m \chi_{y'}^h\|_{\mathcal{B}_{p/m}^h} \leq C_{N,m} (1 + |y - y'|)^{-N} \quad (3.22')$$

*pour tout  $y, y' \in \mathbb{Z}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .*

La preuve de la Proposition 3.4 sera détaillée dans le Chapitre 3.

Preuve de la Proposition 3.1.

On fixe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $m_0 \geq 1 + \frac{d}{2}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors le théorème de Weierstrass permet de trouver un polynôme d'une variable réelle,  $g_\varepsilon(s) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} s^k$ , tel que

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0/2} \left| (\lambda + \lambda_0)^{m_0} f(\lambda) - g_\varepsilon \left( (\lambda + \lambda_0)^{-1} \right) \right| < \varepsilon / C_{0,m_0}, \quad (3.23)$$

où  $C_{0,m_0}$  est la constante de la formule (3.22). En posant  $f_\varepsilon(\lambda) = (\lambda + \lambda_0)^{-m_0} g_\varepsilon((\lambda + \lambda_0)^{-1})$  on obtient

$$\lambda \geq \lambda_0/2 \Rightarrow \pm (f(\lambda) - f_\varepsilon(\lambda)) \leq \varepsilon (\lambda + \lambda_0)^{-m_0} / C_{0,m_0},$$

donc

$$\pm \operatorname{tr} \chi_y (f(H_z) - f_\varepsilon(H_z)) \chi_y \leq \frac{\varepsilon}{C_{0,m_0}} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0} \chi_y < \varepsilon. \quad (3.24)$$

Ainsi il suffit de prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$  la fonction

$$z \rightarrow \operatorname{tr} \chi_y f_\varepsilon(H_z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0+k}$$

appartient à  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ . Pour cela on va montrer que les fonctions  $z \rightarrow \Phi_{y,m}(z) = \chi_y R_z^m$  appartiennent à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_1)$  pour  $m \geq m_0$ . Plus précisément on va établir

$$p \geq \max\{m, 1 + \frac{d}{2}\} \Rightarrow \Phi_{y,m} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/m}) \quad (3.25(m))$$

par récurrence par rapport à  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On commence par  $m = 1$ . On pose  $R = (-\Delta + \lambda_0 I)^{-1}$  et

$$\Phi_{y,1,N}(z) = \chi_y R \sum_{k=0}^N (-V_z R)^k. \quad (3.26)$$

Puisque  $\|V_z R\|_{\mathcal{B}} \leq 1/2$  on peut écrire

$$\Phi_{y,1}(z) = \chi_y R (I + V_z R)^{-1} = \chi_y R \sum_{k=0}^{\infty} (-V_z R)^k \quad (3.27)$$



et on trouve

$$\|\Phi_{y,1}(z) - \Phi_{y,1,N}(z)\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|\chi_y R\|_{\mathcal{B}_p} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|V_z R\|_{\mathcal{B}}^k \leq 2^{-N} \|\chi_y R\|_{\mathcal{B}_p}. \quad (3.28)$$

Ainsi pour montrer (3.25(1)) il suffit de savoir que  $\Phi_{y,1,N} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$ . Mais les fonctions  $z \rightarrow (V_z R)^k$  appartiennent à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B})$  et  $\chi_y R \in \mathcal{B}_p$ , donc il est clair que  $\Phi_{y,1,N} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$ .

Utilisant le raisonnement par récurrence on suppose que l'assertion (3.25(m)) est vraie pour un certain  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors le Lemme 3.3 assure que

$$\Phi_{y,m+1,N} = \sum_{y' \in \llbracket -N; N \rrbracket^d} \Phi_{y,1,N} \Phi_{y',m} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$$

et utilisant Proposition 3.4 on peut estimer

$$\begin{aligned} N' > N &\Rightarrow \|\Phi_{y,m+1,N'}(z) - \Phi_{y,m+1,N}(z)\|_{\mathcal{B}_{p/(m+1)}} \leq \\ &\sum_{y' \in \llbracket -N'; N' \rrbracket^d \setminus \llbracket -N; N \rrbracket^d} \|\chi_y R_z \chi_{y'}\|_{\mathcal{B}_p} \|\chi_{y'} R_z^m\|_{\mathcal{B}_{p/(m+1)}} \\ &\leq \sum_{y' \in \mathbb{Z}^d \setminus \llbracket -N; N \rrbracket^d} C(1 + |y - y'|)^{-d-1} \leq C'/N, \end{aligned}$$

donc  $\Phi_{y,m+1}$  est la limite de la suite  $(\Phi_{y,m+1,N})_{N \in \mathbb{N}}$  dans  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$ .  $\triangle$

**Proposition 3.5** *Soient  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $L' \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$  et  $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ . On pose*

$$u_{\rho,y_1}^{h,L'}(z) = \text{tr}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_z^h) - f(-\Delta^h)), \quad (3.29)$$

où  $\chi_{\rho,y_1}^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$  est défini par la formule

$$(\chi_{\rho,y_1}^{h,L'} \varphi)(hn_1, hn_2) = \sum_{y_2 \in \llbracket -L'; L' \rrbracket^{d_2}} \chi_{C(y_1,y_2)}(hn_1/\rho, hn_2) \varphi(hn_1, hn_2) \quad (3.30)$$

pour  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$  et  $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ .

Si  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho \in [\frac{1}{2}; 1]$  alors on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \left| u_{\rho,0}^{h,L'}(z) - \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} e^{iz\gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon/8, \quad (3.31)$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |c_{\varepsilon,k}^{h,\rho}| < \infty. \quad (3.31')$$

Preuve du fait que Proposition 3.5 implique Théorème 1.2

Au début on observe que pour  $\rho \in h\mathbb{N}, y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$  on peut écrire

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \text{tr}^h T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_{\rho y_1}^h) - f(-\Delta^h)) T_{(-\rho y_1,0)}^h, \quad (3.32)$$

où  $T_{(\rho y_1,0)}^h$  est l'opérateur de la translation,

$$(T_{(\rho y_1,0)}^h \varphi)(hn) = \varphi(hn_1 - \rho y_1, hn_2) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (3.33)$$

Compte tenu de

$$T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,0}^{h,L'} T_{(-\rho y_1,0)}^h = \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}, \quad T_{(\rho y_1,0)}^h H_{\rho y_1}^h T_{(-\rho y_1,0)}^h = H^h \quad (3.34)$$

on obtient

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \text{tr}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_z^h) - f(-\Delta^h)). \quad (3.35)$$

En introduisant la notation  $[L]_\rho = \rho[L/\rho]$  on trouve

$$\sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} \chi_{\rho,y_1}^{h,L'} = \chi_{[L]_\rho}^{h,L'} \quad (3.36)$$

et par conséquent

$$(2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = N_{[L]_\rho}^{L'}(f, H^h). \quad (3.37)$$

Compte tenu du Corollaire 2.2 il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H^h) - N_{L_2}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (3.38)$$

Choisissant  $L_\varepsilon$  assez grand et utilisant Corollaire 2.2(c) on voit que pour obtenir (3.38) il suffit de montrer que pour un choix convenable de  $\rho(h, \varepsilon) \in [1/2; 1] \cap h\mathbb{N}$  on ait

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{[L_2]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon/2. \quad (3.39)$$

Soient  $c_{\varepsilon, k}^{h, \rho}$ ,  $\gamma_{\varepsilon, k}$  choisis comme dans la Proposition 3.5 et

$$N_{\varepsilon, L}^{h, \rho} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon, k}^{h, \rho} N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon, k}), \quad (3.40)$$

où

$$N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon, k}) = (2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} e^{i\rho y_1 \gamma_{\varepsilon, k}}. \quad (3.40')$$

Alors (3.31) avec  $\rho = \rho(h, \varepsilon)$  assure

$$|N_{[L]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{\varepsilon, L}^{h, \rho(h, \varepsilon)}| < \varepsilon/8 \quad (3.41)$$

et pour obtenir (3.39) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon, L_1}^{h, \rho(h, \varepsilon)} - N_{\varepsilon, L_2}^{h, \rho(h, \varepsilon)}| < \varepsilon/4. \quad (3.42)$$

Ainsi il suffit de prouver que (3.40') possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$  et le fait que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $h_\varepsilon > 0$ ,  $C_\varepsilon$  tels que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k}) - \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k}) \right| \leq C_\varepsilon/L. \quad (3.43(k)).$$

On peut supposer  $\gamma_{\varepsilon, 0} = 0$  (avec la possibilité d'avoir  $c_{\varepsilon, 0}^h = 0$ ) et  $\gamma_{\varepsilon, k} \neq 0$  pour  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ . Alors (3.43(0)) est évident et pour démontrer (3.43(k)) avec  $k \geq 1$  on pose

$$d_\varepsilon(t) = \inf_{1 \leq k \leq N(\varepsilon)} \text{dist}(t\gamma_{\varepsilon, k}, 2\pi\mathbb{Z}^d) \quad \text{pour } t > 0. \quad (3.44)$$

Alors la fonction  $t \rightarrow d_\varepsilon(t)$  est continue et  $\{t \in \mathbb{R} : d_\varepsilon(t) = 0\}$  est discret. Ainsi on peut trouver  $t(\varepsilon) \in [1/2; 3/4]$  tel que  $d_\varepsilon(t) > 0$  et  $h(\varepsilon) > 0$  tel que  $t(\varepsilon) \leq t \leq t(\varepsilon) + h(\varepsilon) \Rightarrow d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$ , donc il existe  $\rho(h, \varepsilon) \in [1/2; 1] \cap h\mathbb{N}$  tel

que  $d_\varepsilon(\rho(h, \varepsilon)) \geq d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$ . Pareillement comme au début de cette section on peut estimer

$$|N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k})| \leq 2L^{-1} |e^{id_\varepsilon(t(\varepsilon))/2} - 1|^{-1}. \quad (3.45)$$

Ainsi on a démontré que Théorème 1.2 résulte de Proposition 3.5.  $\triangle$

*Preuve de la Proposition 3.5* Soit  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^h)_{0 < h \leq 1}$  une famille d'espaces de Banach  $\mathcal{A}^h$ . Alors on écrira  $\Phi \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  si et seulement si  $\Phi = (\Phi^h)_{0 < h \leq 1}$  est une famille d'applications  $\Phi^h : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathcal{A}^h$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon, k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $A_{\varepsilon, k}^h \in \mathcal{A}^h$  ( $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi^h(z) - \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon, k}^h e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon, k}}\|_{\mathcal{A}^h} < \varepsilon \quad (3.46)$$

et  $\sup_{0 < h \leq 1} \|A_{\varepsilon, k}^h\|_{\mathcal{A}^h} < \infty$  pour  $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ .

Alors il est clair que  $(z \rightarrow V_z^h)_{0 < h \leq 1} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; (\mathcal{B}^h)_{0 < h \leq 1})$  et le Lemme 3.3 reste valable également.

Il reste à suivre la preuve de la Proposition 3.2 en remplaçant  $R_z$ ,  $V_z$ ,  $R$ ,  $\mathcal{B}_{p/m}$  par  $(R_z^h)_{0 < h \leq 1}$ ,  $(V_z^h)_{0 < h \leq 1}$ ,  $((-\Delta^h + \lambda_0 I)^{-1})_{0 < h \leq 1}$  et  $(\mathcal{B}_{p/m}^h)_{0 < h \leq 1}$  respectivement.  $\triangle$

## 4 Preuve du Théorème 1.5

On note par  $\mathcal{F}$  l'opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  donné par la formule

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \quad \text{pour } \varphi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) \quad (4.1)$$

et on introduit la bijection isométrique  $\mathcal{F}^h : l^2(h\mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2([-\pi/h; \pi/h]^d)$  par la formule

$$(\mathcal{F}^h \varphi)(\xi) = (h/2\pi)^{d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{ihn \cdot \xi} \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (4.2)$$

**Lemme 4.1** Soit  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On définit  $\theta^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$  en posant  $\theta^h(hn) = \theta(hn)$  pour  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{\xi \in [-\pi/h; \pi/h]^d} h^{d/2} |\xi|^N |(\mathcal{F}^h \theta_h)(\xi)| < \infty. \quad (4.3)$$

*Preuve.* Pour  $N \in \mathbb{N}$  posons  $\theta_N^h = (-\Delta^h)^N \theta^h$ . Il est clair que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |\theta_1^h(hn)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{1 \leq j \leq d} |\partial_{x_j}^2 \theta(x)| \leq C' \quad (4.4)$$

et plus généralement pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$C_N = \sup_{0 < h \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |\theta_N^h(hn)| < \infty, \quad (4.4')$$

donc

$$|(\mathcal{F}^h \theta_N^h)(\xi)| \leq (h/2\pi)^{d/2} \sum_{\{n \in \mathbb{Z}^d : hn \in \text{supp } \theta_N^h\}} |\theta_N^h(hn)| \leq C_N h^{-d/2}. \quad (4.5)$$

De l'autre côté on a  $(\mathcal{F}^h \theta_N^h)(\xi) = \vartheta_h(\xi)^N (\mathcal{F}^h \theta^h)(\xi)$  avec

$$\vartheta_h(\xi) = \sum_{j=1}^d \frac{2 - 2 \cos(h\xi_j)}{h^2}. \quad (4.6)$$

Il reste à remarquer que

$$\xi \in [-\pi/h; \pi/h]^d \implies \frac{1}{4} |\xi|^2 \leq \vartheta_h(\xi) \leq |\xi|^2 \quad (4.7)$$

avec (4.5) impliquent (4.3).  $\triangle$

On note par  $J^h$  l'injection isométrique  $L^2([\pi/h; \pi/h]^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ , qui s'obtient en prolongeant les fonctions par la valeur 0 sur  $\mathbb{R}^d \setminus [-\pi/h; \pi/h]^d$ . Alors

$$J^{h*} \varphi = \varphi|_{[-\pi/h; \pi/h]^d} \in L^2([- \pi/h; \pi/h]^d) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad (4.8)$$

est la formule de l'opérateur adjoint à  $J^h$ .

Pour  $T > 0$  on définit  $\chi_T \in \mathcal{B}$  par la formule

$$(\chi_T \varphi)(\xi) = \chi_{[-T; T]^d}(\xi) \varphi(\xi) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (4.9)$$

Ensuite on définit  $P_T \in \mathcal{B}$  et  $P_T^h \in \mathcal{B}^h$  par

$$P_T = \mathcal{F}^* \chi_T \mathcal{F}, \quad P_T^h = (J^h \mathcal{F}^h)^* \chi_T J^h \mathcal{F}^h \quad (4.10)$$

et on remarque que  $T \geq \pi/h \implies P_T^h = I$ .

**Lemme 4.2** Si  $T' \geq 1$  est fixé, alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|(I - P_T) \Theta P_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad (4.11)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 < h \leq 1} \|(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} = 0. \quad (4.11')$$

*Preuve.* Soit  $\tilde{\Theta}_{T,T'}^h \in \mathcal{B}(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))$  défini par

$$\tilde{\Theta}_{T,T'}^h = \mathcal{F}^h(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h (\mathcal{F}^h)^*. \quad (4.12)$$

Alors

$$(\tilde{\Theta}_{T,T'}^h \varphi)(\xi) = \int_{[-\pi/h; \pi/h]^d} K_{T,T'}^h(\xi, \xi') \varphi(\xi') d\xi', \quad (4.12')$$

$$K_{T,T'}^h(\xi, \xi') = (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) (h/2\pi)^{d/2} (\mathcal{F}^h \theta^h)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \quad (4.12'')$$

En vertu du Lemme 4.1 pour  $T > T'$  on peut estimer

$$\begin{aligned} |K_{T,T'}^h(\xi, \xi')| &\leq (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) C_N (1 + |\xi - \xi'|)^{-N} \chi_{[-T'; T']^d}(\xi') \\ &\leq C_N |T - T'|^{-N/2} (1 + |\xi - \xi'|)^{-N/2} \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si  $N > d$  alors on peut estimer

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} |K_{T,T'}^h(\xi, \xi')|^2 d\xi d\xi' \leq \\ &\int_{[-T'; T']^d} d\xi' \int_{[-\pi/h; \pi/h]^d} d\xi C_N^2 |T - T'|^{-N} (1 + |\xi - \xi'|)^{-N} \leq C'_N |T - T'|^{-N} \end{aligned}$$

et pour terminer la preuve de (4.11') on remarque que pour  $T'$  fixé on a

$$\begin{aligned} \|(I - P_T) \Theta^h P_{T'}\|_{\mathcal{B}^h} &= \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))} \\ &\leq \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))} \rightarrow 0 \quad \text{quand } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La preuve de (4.11) est semblable:  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  assure le fait que  $\mathcal{F}\theta$  est à décroissance rapide, c'est-à-dire pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $C_N > 0$  telle que

$$|\mathcal{F}\theta(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \quad (4.14)$$

et définissant l'opérateur  $\tilde{\Theta}_{T,T'} = \mathcal{F}(I - P_T) \Theta P_{T'} \mathcal{F}^*$  on trouve l'expression

$$(\tilde{\Theta}_{T,T'} \varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{T,T'}(\xi, \xi') \varphi(\xi') d\xi', \quad (4.15)$$

$$K_{T,T'}(\xi, \xi') = (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F}\theta)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'), \quad (4.15')$$

permettant d'appliquer le même raisonnement qu'auparavant.  $\triangle$

**Lemme 4.3** *On suppose  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\Theta, \Theta^h$  comme dans Corollaire 2.4. On pose*

$$\tilde{\Theta} = \mathcal{F}\Theta\mathcal{F}^*, \quad \tilde{\Theta}^h = J^h\mathcal{F}^h\Theta^h(J^h\mathcal{F}^h)^*, \quad (4.16)$$

$$\tilde{V} = \mathcal{F}V\mathcal{F}^*, \quad \tilde{V}^h = J_h\mathcal{F}^hV^h(J^h\mathcal{F}^h)^*. \quad (4.17)$$

*Alors pour tout  $T' > 0$  on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (4.18)$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On va montrer qu'il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.19)$$

Mais Lemme 4.2 assure qu'il existe  $T = T(\varepsilon) \geq T'$  tel que

$$\|(I - \chi_T)\tilde{\Theta}\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = \|(I - P_T)\Theta P_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3, \quad (4.20)$$

$$\|(I - \chi_T)\tilde{\Theta}^h\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = \|(I - P_T^h)\Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3, \quad (4.20')$$

donc pour obtenir (4.18) il suffit de prouver

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3 \quad (4.21)$$

On peut supposer que  $h \leq h_\varepsilon \leq \pi/T \leq \pi T'$ . Alors

$$(\chi_T(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\chi_{T'})\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')\varphi(\xi') d\xi', \quad (4.22)$$

$$\tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi') = (2\pi)^{-d/2} \chi_{[-T; T]^d}(\xi)(h^d \mathcal{F}^h \theta^h - \mathcal{F}\theta)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \quad (4.22')$$

Ensuite on remarque que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi') = 0 \text{ pour } \xi, \xi' \in \mathbb{R}^d. \quad (4.23)$$

En effet, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  on a  $h^d \mathcal{F}^h \theta^h(\xi) \rightarrow \mathcal{F}\theta(\xi)$  quand  $h \rightarrow 0$ , parce qu'il s'agit de la suite des sommes de Riemann de l'intégrale de la fonction appartenant à  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Pour terminer la preuve de la première assertion (4.18) on remarque qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que  $|\widetilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')| \leq C_0 \chi_{[-T; T]^{2d}}(\xi, \xi')$ , alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que (4.23) implique

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}}^2 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}_2}^2 \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\widetilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')|^2 d\xi d\xi' = 0. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de la deuxième assertion (4.18) on doit trouver  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.24)$$

Le Lemme 2.4 assure l'existence de  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ ,  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$  tels que l'on ait  $\|V - V_\varepsilon\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3$  avec

$$V_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes V_{\varepsilon,k},$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1)(x_1) = e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(x_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k} \varphi_2)(x_2) = v_{\varepsilon,k}(x_2) \varphi_2(x_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2}).$$

Alors on a également  $\|V^h - V_\varepsilon^h\|_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3$  avec

$$V_\varepsilon^h = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \otimes V_{\varepsilon,k}^h,$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \varphi_1)(hn_1) = e^{ihn_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(hn_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k}^h \varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2) \varphi_2(hn_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

Ainsi au lieu de (4.24) il suffit de prouver

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3 \quad (4.25)$$



avec

$$\tilde{V}_\varepsilon = \mathcal{F}V_\varepsilon\mathcal{F}^*, \quad \tilde{V}_\varepsilon^h = J^h\mathcal{F}^hV_\varepsilon^h(J^h\mathcal{F}^h)^*.$$

Ensuite on remarque que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , où  $\mathcal{F}_j$  pour  $j = 1, 2$ , est l'opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^{d_j})$  donné par la formule

$$(\mathcal{F}_j\varphi_j)(\xi_j) = (2\pi)^{-d_j/2} \int_{\mathbb{R}^{d_j}} e^{ix_j \cdot \xi_j} \varphi_j(x_j) dx_j \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j})$$

et introduisant  $\tilde{V}_{\varepsilon,k} = \mathcal{F}_2V_{\varepsilon,k}\mathcal{F}_2^*$  on trouve

$$\tilde{V}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h$$

où  $(T_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_2)(x_2) = \varphi_2(x_2 - \gamma_{\varepsilon,k})$  pour  $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2})$ .

De manière analogue  $\mathcal{F}^h = \mathcal{F}_1^h \otimes \mathcal{F}_2^h$  avec  $\mathcal{F}_j^h : l^2(h\mathbb{Z}^{d_j}) \rightarrow L^2([-\pi/h; \pi/h]^{d_j})$  pour  $j = 1, 2$ , est donné par la formule

$$(\mathcal{F}_j^h\varphi_j)(\xi_j) = (h/2\pi)^{d_j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{d_j}} e^{ihn_j \cdot \xi_j} \varphi_j(hn_j) \quad \text{pour } f_j \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^{d_j})$$

et introduisant  $\tilde{V}_{\varepsilon,k}^h = J^h\mathcal{F}_2^hV_{\varepsilon,k}^h(J^h\mathcal{F}_2^h)^*$  on trouve que pour  $h \leq \pi/T$  on a

$$\tilde{V}_\varepsilon^h \chi_T = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \chi_T^{(1)} \otimes \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h \chi_T^{(2)}$$

où  $\chi_T^{(j)} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_j}))$  avec  $j = 1, 2$ , est donné par la formule

$$(\chi_T^{(j)}\varphi_j)(x_j) = \chi_{[-T; T]^{d_j}}(x_j)\varphi_j(x_j) \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j}).$$

Cependant la démonstration de la partie (a) donne également

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{V}_{\varepsilon,k} - \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))} = 0 \quad (4.26)$$

et compte tenu de

$$(\tilde{V}_\varepsilon - \tilde{V}_\varepsilon^h)\chi_T = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \chi_T^{(1)} \otimes (\tilde{V}_{\varepsilon,k} - \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)}$$

il est clair que (4.25) résulte de (4.26).  $\triangle$

**Lemme 4.4** *Soit  $\lambda_0 \geq 1 + 2\|V\|$  et posons*

$$R = (-\Delta + V + \lambda_0 I)^{-1}, \quad R^h = (-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{R} = \mathcal{F} R \mathcal{F}^*, \quad \tilde{R}^h = J^h \mathcal{F}^h V^h (J^h \mathcal{F})^*. \quad (4.28)$$

Alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0$ .

*Preuve.* Compte tenu de les expressions

$$R = \tilde{R}_\circ \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{V} \tilde{R}_\circ)^k, \quad R^h = \tilde{R}_\circ^h \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{V}^h \tilde{R}_\circ^h)^k,$$

où on a désigné

$$\tilde{R}_\circ = \mathcal{F}(-\Delta + \lambda_0 I)^{-1} \mathcal{F}^*, \quad \tilde{R}_\circ^h = J^h \mathcal{F}^h (-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1} (J^h \mathcal{F})^*,$$

il suffit de montrer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{V} \tilde{R} - \tilde{V}^h \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (4.29)$$

D'abord on montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.30)$$

Cependant

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_\circ \varphi)(\xi) &= (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1} \varphi(\xi), \\ (\tilde{R}_\circ^h \varphi)(\xi) &= \chi_{[-\pi/h; \pi/h]^d}(\xi) (\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1} \varphi(\xi), \end{aligned}$$

où  $\vartheta_h$  est donné par (4.6) et on remarque qu'il existe  $C_0 > 0$  tel que

$$\|(I - \chi_T) \tilde{R}_\circ\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus [-T; T]^d} (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1} \leq C_0 T^{-2}, \quad (4.31)$$

$$h \leq \pi/T \Rightarrow \|(I - \chi_T) \tilde{R}_\circ^h\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus [-T; T]^d} (\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1} \leq C_0 T^{-2}, \quad (4.31')$$

où la dernière estimation résulte de (4.7). Pour justifier (4.30) il suffit de choisir  $T$  tel que  $C_0 T^{-2} < \varepsilon/4$  et utiliser le fait que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [-T; T]^d} |\vartheta_h(\xi) - |\xi|^2| = 0. \quad (4.32)$$

Il reste à montrer l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{V}^h \tilde{R}_o - \tilde{V} \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.33)$$

Soit  $T$  tel que  $2\|V\|_{\mathcal{B}} C_0 T^{-2} < \varepsilon/4$ . Si  $h_\varepsilon > 0$  est suffisamment petit, alors

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{V}^h(\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o)\|_{\mathcal{B}} \leq \|V\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4 \quad (4.34)$$

et compte tenu du Lemme 2.3,

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V}^h - \tilde{V})\chi_T\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4. \quad (4.35)$$

Pour obtenir (4.33) on estime

$$\|\tilde{V}^h \tilde{R}_o - \tilde{V} \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} \leq \|\tilde{V}^h(\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o)\|_{\mathcal{B}} +$$

$$\|(\tilde{V}^h - \tilde{V})\chi_T\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} + \|\tilde{V}^h - \tilde{V}\|_{\mathcal{B}} \|(I - \chi_T)\tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}}$$

et (4.34), (4.35) permettent de majorer la dernière expression par  $\frac{3}{4}\varepsilon + 2\|V\|_{\mathcal{B}} C_0 T^{-2} < \varepsilon$ .  $\triangle$

**Lemme 4.5** *Pour démontrer Théorème 1.5 il suffit de montrer que l'on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{tr}^h P_T^h \Theta^h (R^h)^m \Theta^h = \text{tr} P_T \Theta R^m \Theta. \quad (4.36)$$

pour tout  $T \geq 1$  et  $m \geq 2 + \frac{d}{2}$ .

*Preuve.* Compte tenu du Corollaire 2.3 il faut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| \text{tr}^h \Theta^h f(H^h) \Theta^h - \text{tr} \Theta f(H) \Theta \right| < \varepsilon. \quad (4.37)$$

D'abord on va montrer qu'il existe  $T(\varepsilon)$  tel que pour  $T \geq T(\varepsilon)$  on a

$$\|(I - P_T^h) \Theta^h f(H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} < \varepsilon/4. \quad (4.38)$$

En effet, le membre gauche de (4.38) est majoré par  $\zeta_1(h) + \zeta_2(h)$  avec

$$\zeta_1(h) = \|(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} \|f(H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h},$$

$$\zeta_2(h) = \|\Theta^h(I - P_{T'}^h)(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}\|_{\mathcal{B}^h} \|(\lambda_0 I - \Delta^h)R^h\|_{\mathcal{B}^h} \|g(H^h)\Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h}$$

où on a noté  $g(\lambda) = (\lambda_0 + \lambda)f(\lambda)$ . Puisque

$$\|(I - P_{T'}^h)(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}\|_{\mathcal{B}^h} = \sup_{\xi \in [-\pi/h; \pi/h[ \setminus [-T'; T']^d]} |\lambda_0 + \vartheta_h(\xi)|^{-1} \leq CT'^{-2},$$

on peut choisir  $T'$  suffisamment grand pour assurer  $\zeta_2(h) < \varepsilon/8$  pour tout  $h \in ]0; 1]$  et ensuite Lemme 4.2 permet de choisir  $T$  suffisamment grand pour assurer  $\zeta_1(h) < \varepsilon/8$  pour tout  $h \in ]0; 1]$ .

De manière analogue il est possible de trouver  $T(\varepsilon)$  tel que

$$T \geq T(\varepsilon) \Rightarrow \|(I - P_T)\Theta f(H)\Theta\|_{\mathcal{B}_1} < \varepsilon/4. \quad (4.39)$$

Dans le deuxième pas on considère une approximation de  $f$  par  $(f_{\varepsilon'})_{\varepsilon' > 0}$  comme dans la démonstration de Proposition 3.1. Alors il existe  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon' > 0$ ,

$$\|P_T^h \Theta^h (f - f_{\varepsilon'}) (H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq \varepsilon' \|(R^h)^m \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_0 \varepsilon',$$

$$|\mathrm{tr} P_T \Theta (f - f_{\varepsilon'}) (H) \Theta| \leq \varepsilon' \|(R^h)^m \Theta\|_{\mathcal{B}_1} \leq C_0 \varepsilon'.$$

Soit  $\varepsilon' = \varepsilon/(8C_0)$ . Alors (4.37) résulte de

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| \mathrm{tr}^h P_T^h \Theta^h f_{\varepsilon'} (H^h) \Theta^h - \mathrm{tr} P_T \Theta f_{\varepsilon'} (H) \Theta \right| < \varepsilon/4 \quad (4.40)$$

et on termine la démonstration en observant que (4.36) assure l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que (4.40) soit satisfaite.  $\triangle$

#### Preuve du Théorème 1.5

La démonstration est basée sur les égalités

$$\mathrm{tr} P_T \Theta R^m \Theta P_T = \mathrm{tr} \chi_T \tilde{\Theta} \tilde{R}^m \tilde{\Theta} \chi_T,$$

$$\mathrm{tr}^h P_T^h \Theta^h (R^h)^m \Theta^h P_T^h = \mathrm{tr} \chi_T \tilde{\Theta}^h (\tilde{R}^h)^m \tilde{\Theta}^h \chi_T,$$

qui permettent d'écrire (4.36) sous la forme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathrm{tr} \chi_T \left( \tilde{\Theta}^h (\tilde{R}^h)^m \tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta} \tilde{R}^m \tilde{\Theta} \right) \chi_T = 0. \quad (4.41)$$

Pour démontrer (4.41) on remarque que

$$\|\chi_T(\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^m\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta}\tilde{R}^m\tilde{\Theta})\chi_T\|_{\mathcal{B}_1} \leq \zeta_1(h) + \zeta_2(h) + \zeta_3(h)$$

avec

$$\begin{aligned}\zeta_1(h) &= \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^m\|_{\mathcal{B}_1} \|(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\chi_T\|_{\mathcal{B}}, \\ \zeta_2(h) &= \|\tilde{\Theta}^h((\tilde{R}^h)^m - \tilde{R}^m)\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_1}, \\ \zeta_3(h) &= \|\chi_T(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}^m\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_1}.\end{aligned}$$

En utilisant

$$(\tilde{R}^h)^m - \tilde{R}^m = \sum_{m'=1}^m (\tilde{R}^h)^{m'-1}(\tilde{R}^h - \tilde{R})\tilde{R}^{m-m'}$$

on peut estimer

$$\zeta_2(h) \leq \sum_{m'=1}^m \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} \|\tilde{R}^h - \tilde{R}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}^{m-m'}\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}}}$$

avec la convention que l'on utilise la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  au lieu de  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}}$  dans le cas  $m' = 1$  et au lieu de  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}}}$  dans le cas  $m' = m$ . Compte tenu du Lemme 2.2 du Chapitre 3 on a

$$\sup_{0 < h \leq 1} \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} = \sup_{0 < h \leq 1} \|\Theta^h(R^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} < \infty,$$

et de manière analogue on a

$$\|\tilde{R}^{m-m'}\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} = \|R^{m-m'}\Theta\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} < \infty.$$

Ainsi utilisant le Lemme 4.5 on trouve  $\lim_{h \rightarrow 0} \zeta_2(h) = 0$ . Pour terminer la démonstration on remarque de manière analogue que  $\lim_{h \rightarrow 0} \zeta_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \zeta_3(h) = 0$  résulte de Lemme 4.2.  $\triangle$

# Approximations discrètes de la densité d'états surfacique presque périodique

## 1 Énoncés des résultats

Soit  $d = d_1 + d_2$  avec  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ . On identifie  $x \in \mathbb{R}^d$  avec  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  avec le potentiel continu, presque périodique par rapport  $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$  et décroissant suffisamment rapidement en variable  $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ . Plus précisément soit  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  l'espace des fonctions continues presque périodiques  $\mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{C}$ , défini comme le plus petit sous-espace fermé de  $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$  contenant toutes les fonctions exponentielles  $\{x_1 \rightarrow e^{i\gamma \cdot x_1}\}_{\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}}$  et soit  $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction vérifiant les hypothèses

(H1) il existe  $\delta_0 > 0$  et  $C > 0$  tel que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  on ait

$$|v(x_1, x_2)| \leq C(1 + |x_2|)^{-d_2 - \delta_0} \quad (1.1)$$

(H2) la formule  $x_2 \rightarrow v(\cdot, x_2)$  définit l'application continue  $\mathbb{R}^{d_2} \rightarrow CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ , où  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  est défini comme au dessus avec la norme héritée de  $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ .

Sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^d)$  on considère l'opérateur auto-adjoint

$$H = -\Delta + V, \quad (1.2)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace et

$$(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.2')$$

Si  $Z \subset \mathbb{R}^d$  alors  $\chi_Z : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$  désigne la fonction caractéristique de  $Z$  et pour  $L, L' > 0$  soit  $\chi_L^{L'}$  l'opérateur défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par

$$(\chi_L^{L'} \varphi)(x) = \chi_{[-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.3)$$

Alors il est bien connu que pour toute fonction test  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  les opérateurs  $\chi_L^{L'} f(-\Delta)$  et  $\chi_L^{L'} f(H)$  appartiennent à la classe d'opérateurs à trace sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et on peut introduire

$$N_L^{L'}(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \chi_L^{L'}(f(H) - f(-\Delta)). \quad (1.4)$$

Dans la Section 3 on donnera la preuve de

**Théorème 1.1** *On suppose que le potentiel de l'opérateur de Schrödinger  $H$  vérifie les hypothèses (H1) et (H2). Alors pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^L(f, H). \quad (1.5)$$

La distribution  $f \rightarrow N(f, H)$  s'appelle la densité surfacique d'états de  $H$  et on donnera la preuve du fait qu'elle est la limite des densités surfaciques d'états des opérateurs aux différences finies  $H^h$  agissant sur le réseau  $h\mathbb{Z}^d = \{hn \in \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{Z}^d\}$  de taille  $h \in ]0; 1]$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Plus précisément soit  $l^2(h\mathbb{Z}^d)$  l'espace de Hilbert dont les éléments sont les applications  $\varphi : h\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\|\varphi\|_h = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\varphi(hn)|^2 \right)^{1/2} < \infty \quad (1.6)$$

et dont le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle \varphi, \psi \rangle_h = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \varphi(hn) \overline{\psi(hn)}. \quad (1.6')$$

Alors le laplacien discret agit sur  $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$  selon la formule

$$(\Delta^h \varphi)(hn) = \sum_{j=1}^d \frac{\varphi(hn + he_j) - 2\varphi(hn) + \varphi(hn - he_j)}{h^2}, \quad (1.7)$$

où  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  et soit

$$H^h = -\Delta^h + V^h, \quad (1.8)$$

où  $V^h$  est défini à l'aide du potentiel  $v$  par la formule

$$(V^h \varphi)(hn) = v(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (1.8')$$

Par analogie au cas continu on définit

$$N_L^{L'}(f, H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^d : hk \in [-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \delta_{hk}, \delta_{hk} \rangle_h, \quad (1.4')$$

où  $\delta_{hk}(hn) = 0$  si  $n \neq k$  et  $\delta_{hk}(hk) = 1$ . Alors on a

**Théorème 1.2** *On suppose que  $H^h$  est donné par (1.8) avec  $v$  vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Alors pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^L(f, H^h). \quad (1.9)$$

De plus pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (1.9')$$

En ce qui concerne les preuves présentées dans la suite, les résultats de Théorème 1.1 et 1.2 concernant la famille des pavés  $[-L; L]^d$  seront obtenus grâce à l'étude des pavés  $[-L; L]^{d_1} \times [-L'; L']^{d_2}$ . En particulier on prouvera

**Théorème 1.3** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $L' \geq 1$ . Alors les limites*

$$N^{L'}(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H), \quad N^{L'}(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H^h) \quad (1.10)$$

*existent et pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que*

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N^{L'}(f, H^h) - N_L^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (1.10')$$

*De plus il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $L' \geq 1$  on ait*

$$|N^{L'}(f, H) - N(f, H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \quad (1.11)$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |N^{L'}(f, H^h) - N(f, H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \quad (1.11')$$



Il est également possible de retrouver  $N(f, H)$  et  $N(f, H^h)$  utilisant le procédé suivant

**Théorème 1.4** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $L \geq 1$ . Alors les limites*

$$N_L(f, H) = \lim_{L' \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H), \quad N_L(f, H^h) = \lim_{L' \rightarrow \infty} N_L^{L'}(f, H^h) \quad (1.12)$$

*existent et on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que pour  $L, L' \geq 1$  on ait*

$$|N_L^{L'}(f, H) - N_L(f, H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \quad (1.12')$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |N_L^{L'}(f, H^h) - N_L(f, H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \quad (1.12'')$$

*Si l'opérateur  $\chi_L^\infty$  est défini sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par la formule*

$$(\chi_L^\infty \varphi)(x) = \chi_{[-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.13)$$

*alors  $\chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta))$  appartient à la classe d'opérateurs à classe sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et on a les expressions*

$$N_L(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta)), \quad (1.14)$$

$$N_L(f, H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^d: h k \in [-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \delta_{hk}, \delta_{hk} \rangle_h, \quad (1.14')$$

*où la série (1.14') converge absolument. De plus on a*

$$N(f, H) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L(f, H), \quad N(f, H^h) = \lim_{L \rightarrow \infty} N_L(f, H^h) \quad (1.15)$$

*et pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que*

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} |N_L(H^h, f) - N(H^h, f)| < \varepsilon. \quad (1.15')$$

Enfin dans la Section 4 on prouvera

**Théorème 1.5** *Pour toute fonction  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  on a*

$$N(f, H) = \lim_{h \rightarrow 0} N(f, H^h). \quad (1.16)$$

Le résultat du Théorème 1.5 permet d'obtenir

**Théorème 1.6** (a) On désigne par  $\text{supp } N(\cdot, H)$  (respectivement  $\text{supp } N(\cdot, H^h)$ ) le support de la distribution  $f \rightarrow N(f, H)$  (respectivement  $f \rightarrow N(f, H^h)$ ). Alors

$$\text{supp } N(\cdot, H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\text{supp } N(\cdot, H^h), \lambda) = 0\}. \quad (1.17)$$

(b) On désigne par  $\sigma(H)$  (respectivement  $\sigma(H^h)$ ) le spectre de l'opérateur  $H$  (respectivement  $H^h$ ). Alors

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(\sigma(H^h), \lambda) = 0\}. \quad (1.18)$$

(c) On a

$$\sigma(H^h) \cap ]-\infty; 0[ = \text{supp } N(\cdot, H^h) \cap ]-\infty; 0[, \quad (1.19)$$

$$\sigma(H) \cap ]-\infty; 0[ = \text{supp } N(\cdot, H) \cap ]-\infty; 0[. \quad (1.19')$$

On peut remarquer que l'assertion (a) du Théorème 1.6 résulte immédiatement du Théorème 1.5 et l'assertion (b) résulte des propriétés obtenues au cours de la preuve du Théorème 1.5. Ensuite (1.19) a été démontré par Charour [??] et utilisant (1.19) avec (1.17), (1.18) on obtient (1.19').

## 2 Idées de base

Soit  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et soit  $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  l'idéal des opérateurs à trace. Si  $(e_j)_{j \in J}$  est une base orthonormée de l'espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  (c'est-à-dire  $J$  est dénombrable), alors par définition  $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \sum_{j \in J} |\langle Ae_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}}| < \infty$  et

$$\text{tr}_{\mathcal{H}} A = \sum_{j \in J} \langle Ae_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour } A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}). \quad (2.1)$$

Si  $p \geq 1$  alors par définition  $A \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (A^* A)^{p/2} \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$  et

$$\|A\|_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H})} = \left( \text{tr}_{\mathcal{H}} (A^* A)^{p/2} \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

On abrège

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \mathcal{B}^h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \mathcal{B}_p^h = \mathcal{B}_p(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \quad (2.3')$$

$$\mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} A = \mathrm{tr} A, \quad \mathrm{tr}_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} A^h = \mathrm{tr}^h A^h. \quad (2.3'')$$

En introduisant l'opérateur  $\chi_L^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$  défini par

$$(\chi_L^{h,L'} \varphi)(hn) = \chi_{[-L; L[^{d_1} \times [-L'; L'^{d_2}}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d) \quad (2.4)$$

et utilisant le fait que  $(\delta_{hk})_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est une base orthonormée de  $l^2(h\mathbb{Z}^d)$  on trouve l'expression

$$N_L^{L'}(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \mathrm{tr}^h \chi_L^{h,L'}(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \quad (2.5)$$

Dans la suite on considère le pavé unité  $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0; 1[^d\}$  pour  $y \in \mathbb{R}^d$  et on définit  $\chi_y \in \mathcal{B}$ ,  $\chi_y^h \in \mathcal{B}^h$  par

$$(\chi_y \varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (2.6)$$

$$(\chi_y^h \varphi)(hn) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.6')$$

Soit  $\mathcal{K}$  un ensemble (à préciser plus tard) et on suppose que  $v_\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  est réelle pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ . On va étudier les opérateurs auto-adjoints

$$H_\kappa = -\Delta + V_\kappa, \quad H_\kappa^h = -\Delta^h + V_\kappa^h \quad (2.7)$$

$$(V_\kappa \varphi)(x) = v_\kappa(x) \varphi(x), \quad (V_\kappa^h \varphi)(hn) = v_\kappa(hn) \varphi(hn). \quad (2.7')$$

L'énoncé du résultat clé pour la suite est le suivant

**Proposition 2.1** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $(H_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$  donnés par (2.7).*

*(a) On suppose qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que*

$$\|V_\kappa\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v_\kappa(x)| \leq C_0 \quad (2.8)$$

*pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\chi_y f(H_\kappa)\|_{\mathcal{B}_1} + \|\chi_y^h f(H_\kappa^h)\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C \quad (2.9)$$

*pour tout  $\kappa \in \mathcal{K}$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .*

(b) Soit  $\delta \geq 0$ . On suppose

$$M_{\delta, \kappa, \kappa'} = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d} (1 + |x_2|)^\delta |v_\kappa(x_1, x_2) - v_{\kappa'}(x_1, x_2)| < \infty. \quad (2.10)$$

Alors il existe  $C_\delta > 0$  telle que

$$|y_2|^\delta \|\chi_{(y_1, y_2)}(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))\chi_{(y_1, y_2)}\|_{\mathcal{B}_1} \leq C_\delta M_{\delta, \kappa, \kappa'}, \quad (2.11)$$

$$|y_2|^\delta \|\chi_{(y_1, y_2)}^h(f(H_\kappa^h) - f(H_{\kappa'}^h))\chi_{(y_1, y_2)}^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_\delta M_{\delta, \kappa, \kappa'} \quad (2.11')$$

pour tout  $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .

Alors la Proposition 2.1 implique

**Corollaire 2.2** (a) Il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que

$$\sup_{L \geq 1} |N_L^{L_1}(f, H) - N_L^{L_2}(f, H)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}), \quad (2.12)$$

$$\sup_{L \geq 1} \sup_{0 < h \leq 1} |N_L^{L_2}(f, H^h) - N_L^{L_1}(f, H^h)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}). \quad (2.12')$$

(b) Les Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 résultent du Théorème 1.3.

(c) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $L, L' \geq 1$  on ait

$$\sup_{0 < \rho \leq 1} |N_{L+\rho}^{L'}(f, H) - N_L^{L'}(f, H)| \leq CL^{-1}, \quad (2.13)$$

$$\sup_{0 < \rho \leq 1} \sup_{0 < h \leq 1} |N_{L+\rho}^{L'}(f, H) - N_L^{L'}(f, H)| \leq CL^{-1}. \quad (2.13')$$

*Preuve.* (a) On suppose  $L_2 > L_1$ . Alors

$$N_L^{L_2}(f, H^h) - N_L^{L_1}(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \text{tr}^h(\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1})(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \quad (2.14)$$

On introduit

$$\Lambda(L, L_1) = (\mathbb{Z}^{d_1} \cap [-L; L]^{d_1}) \times (\mathbb{Z}^{d_2} \setminus [-(L_1 - 1); L_1 - 1]^{d_2}) \quad (2.15)$$

et on remarque que

$$\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1} = \sum_{y \in \Lambda(L, L_1)} \chi_y^h(\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1}). \quad (2.16)$$

Cependant utilisant Proposition 2.1 avec  $V_\kappa^h = V^h$ ,  $V_{\kappa'}^h = 0$  on voit que  $M_{\delta,\kappa,\kappa'} < \infty$  avec  $\delta = 0$  et  $\delta = d_2 + \delta_0$  et (2.11') permet d'estimer

$$\left| \text{tr}^h \chi_{(y_1, y_2)}^h (\chi_L^{h, L_2} - \chi_L^{h, L_1}) (f(H^h) - f(-\Delta^h)) \right| \leq C(1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0},$$

donc la valeur absolue de (2.14) est majorée par

$$\sup_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{\{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} : |y_2| \geq L_1 - 1\}} C(1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0} \leq C_1 L_1^{-\delta_0}.$$

(b) D'abord on va vérifier que le Théorème 1.2 résulte du Théorème 1.3 et du Corollaire 2.2(a). Pour obtenir l'assertion du Théorème 1.2 on doit montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (2.17)$$

Soit  $C_0 > 0$  la constante du Corollaire 2.2(a) et  $L'_\varepsilon$  tel que  $C_0 L'^{-\delta_0}_\varepsilon < \varepsilon/8$ . Ensuite l'assertion du Théorème 1.3 permet de trouver  $L_\varepsilon \geq L'_\varepsilon$  et  $h_\varepsilon > 0$  tels que

$$\begin{aligned} L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon &\Rightarrow |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \leq \\ &|N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_2}^{L_\varepsilon}(f, H^h)| + |N_{L_2}^{L_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_\varepsilon}(f, H^h)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

pour  $0 < h < h_\varepsilon$ . Ainsi (2.18) et (2.12') impliquent

$$\begin{aligned} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| &\leq |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| + \\ &\sum_{1 \leq k \leq 2} |N_{L_k}^{L_k}(f, H^h) - N_{L_k}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_0(2L_\varepsilon^{-\delta_0} + L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}) < \varepsilon \end{aligned}$$

pour  $L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon$ ,  $0 < h < h_\varepsilon$  et il est clair que l'assertion du Théorème 1.1 s'obtient du Théorème 1.3 et du Corollaire 2.2(a) de manière analogue. En ce qui concerne Théorème 1.4, il est évident que l'assertion du Corollaire 2.2(a) implique l'existence des limites (1.12) et les estimations (1.12'), (1.12''). Ensuite pour justifier  $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty \in \mathcal{B}_1$  on remarque que la suite  $((f(H) - f(-\Delta))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$  est Cauchy dans  $\mathcal{B}_1$  et sa limite dans  $\mathcal{B}_1$  coïncide avec  $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty$  car  $\lim_{L' \rightarrow \infty} \|\chi_L^\infty \varphi - \chi_L^{L'} \varphi\| = 0$  pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . De la même manière on trouve que  $((f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{B}_1$  vers  $(f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{h, \infty}$ , où

$$(\chi_L^{h, \infty} \varphi)(hn) = \chi_{[-L; L[d_1 \times \mathbb{R}^{d_2}]}(hn) \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.19)$$

Ainsi on a

$$N_L(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^{h,\infty}(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \quad (2.20)$$

et par conséquent la série (2.14') converge absolument. Finalement pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L'_\varepsilon > 0$  tel que

$$L \leq L'_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h \leq 1} \sup_{L \geq 1} |N_L(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| \leq C_0 L'^{-\delta_0} < \varepsilon/2,$$

donc (1.15'') résulte de (1.9').

(c) Soit  $\Lambda'(L) = \mathbb{Z}^{d_1} \cap ([-(L+2); L+2]^{d_1} \setminus [-(L-1); L-1]^{d_1})$ . Alors

$$\chi_{L+\rho}^{h,L'} - \chi_L^{h,L'} = \sum_{y \in \Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2}} \chi_y^h (\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1}) \quad (2.21)$$

et compte tenu du fait que  $\operatorname{card} \Lambda'(L) \leq C_0 L^{d-1}$  on a peut estimer le membre gauche de (1.13') par

$$\begin{aligned} & C_1 L^{-1} \sup_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} \|\chi_{(y_1, y_2)}(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \chi_{(y_1, y_2)}\|_{\mathcal{B}_1} \\ & \leq C_2 L^{-1} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} (1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0} \leq C L^{-1}. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Corollaire 2.3** *Pour prouver Théorème 1.5 il suffit de montrer que pour toute fonction  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tr}^h \Theta^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) = \operatorname{tr} \Theta(f(H) - f(-\Delta)), \quad (2.22)$$

où  $\Theta$  et  $\Theta^h$  sont les opérateurs de multiplication

$$(\Theta\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (2.23)$$

$$(\Theta^h\varphi)(hn) = \theta(hn)\varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (2.23')$$

*Preuve.* L'assertion du Théorème 1.4 sera démontrée si on montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $L_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$  tels que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (2.24)$$

Soit  $C_0 > 0$  la constante du Corollaire 2.2(a) et  $L_\varepsilon$  tel que  $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} < \varepsilon/8$ . Ensuite pour  $L > 0$  on peut choisir  $\theta_L \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  telle que  $0 \leq \theta_L \leq 1$ ,  $\theta_L = 1$  sur  $[-L; L]^d$  et  $\text{supp } \theta_L \subset [-L-1; L+1]^d$ . On introduit les opérateurs  $\Theta_L$  et  $\Theta_L^h$  définis par

$$(\Theta_L \varphi)(x) = \theta_L(x) \varphi(x) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$(\Theta_L^h \varphi)(hn) = \theta_L(hn) \varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$$

et on montre qu'il est possible de choisir  $L_\varepsilon$  tel que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0 < h < h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - \text{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h))| < \varepsilon/4, \quad (2.25)$$

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_L^L(f, H) - \text{tr } \Theta_L(f(H) - f(-\Delta))| < \varepsilon/4. \quad (2.25')$$

En effet pour obtenir (2.24) on remarque que

$$\Theta_L^h - \chi_L^{h,L} = \sum_{y \in \Lambda(L,L) \cup (\Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2})} \chi_y^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L})$$

où  $\Lambda(L, L)$  et  $\Lambda'(L)$  sont comme dans la preuve du Corollaire 2.2. Alors de la même manière on trouve

$$\sum_{y \in \Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2}} |\text{tr}^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L}) \chi_y^h (f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_0 L^{-\delta_0},$$

$$\sum_{y \in \Lambda(L,L)} |\text{tr}^h (\Theta_L^h - \chi_L^{h,L}) \chi_y^h (f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_1 L^{-1}$$

et (2.25) est assuré si  $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} + C_1 L_\varepsilon^{-1} < \varepsilon/4$ . De manière analogue on obtient (2.25') et pour terminer la preuve de (2.24) il suffit de remarquer que (2.22) assure l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h < h_\varepsilon} |\text{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) - \text{tr } \Theta_L(f(H) - f(-\Delta))| < \varepsilon/2. \quad \triangle$$

**Lemme 2.4** Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_2}$ ,  $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$  pour  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$  tels que

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} v_{\varepsilon,k}(x_2) e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon.$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \varphi_1)(hn_1) = e^{ihn_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(hn_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k}^h \varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2) \varphi_2(hn_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in h^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $w_\varepsilon(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) \theta_\varepsilon(x_2)$  où  $\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$  est choisie telle que  $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$  et  $|v(x) - w_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ensuite on remarque que pour tout  $\varepsilon' > 0$  il existe  $\delta' > 0$  tel que

$$|x_2 - x'_2| < \delta' \Rightarrow \sup_{x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}} |w_\varepsilon(x_1, x_2) - w_\varepsilon(x_1, x'_2)| < \varepsilon'$$

et utilisant p. ex. les formules de polynômes de Bernstein on peut trouver les coefficients  $c_{N,y_2,\nu,\varepsilon} \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $x_2 \in \text{supp } \theta_\varepsilon$  on ait

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \text{supp } \theta_\varepsilon \\ \{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} : |\nu| \leq 2d_1 N(\varepsilon)\}}} v(x_1, y_2/N(\varepsilon)) c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

si  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  est choisi suffisamment grand.

Pour terminer la preuve on remarque que  $v(\cdot, N(\varepsilon)^{-1}y_2) \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  permet de trouver  $N'(\varepsilon)$  et  $c_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{R}^{d_1}$  pour  $k = 1, \dots, N'(\varepsilon)$  tels que

$$\left| w_\varepsilon(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \text{supp } \theta_\varepsilon \\ 1 \leq k \leq N'(\varepsilon)}} c_{\varepsilon,k,y_2} e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k,y_2}} v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) = \sum_{\{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} : |\nu| \leq 2d_1 N(\varepsilon)\}} c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \theta_\varepsilon(x_2). \quad \triangle$$



### 3 Preuve de Théorèmes 1.1-1.4

La preuve est basée sur l'étude de la famille d'opérateurs  $(H_z)_{z \in \mathbb{R}^{d_1}}$  définis sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par la formule

$$H_z = -\Delta + V_z, \quad (3.1)$$

$$(V_z \varphi)(x) = v(x_1 + z, x_2) \varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (3.1')$$

On commence par l'énoncé du résultat clé de cette section :

**Proposition 3.1** *Soit  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $L' \in \mathbb{N}$  et  $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ . On pose*

$$u_{y_1}^{L'}(z) = \sum_{y_2 \in \llbracket -L'; L' \rrbracket^{d_2}} \text{tr } \chi_{(y_1, y_2)}(f(H_z) - f(-\Delta)), \quad (3.2)$$

où  $\llbracket -L'; L' \rrbracket = \mathbb{Z} \cap [-L'; L']$ . Alors  $u_{y_1}^{L_0} \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ .

Preuve du fait que Proposition 3.1 implique Théorème 1.1

Soit  $T_{(z,0)}$  l'opérateur de la translation,  $(T_{(z,0)}\varphi)(x) = \varphi(x_1 - z, x_2)$ . Alors

$$H = T_{(z,0)} H_z T_{(-z,0)}, \quad \chi_{(y_1, y_2)} = T_{(y_1,0)} \chi_{(y_1, y_2)} T_{(-y_1,0)}, \quad (3.3)$$

$$\text{tr } T_{(-y_1,0)} \chi_{(0, y_2)} f(H_{y_1}) T_{(y_1,0)} = \text{tr } \chi_{(y_1, y_2)} f(H) \quad (3.4)$$

et il est clair que

$$u_{y_1}^{L'}(0) = u_0^{L'}(y_1). \quad (3.5)$$

Ainsi notant par  $[L]$  la partie entière de  $L$  on peut écrire

$$(2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} u_0^{L'}(y_1) = N_{[L]}^{L'}(f, H), \quad (3.6)$$

et compte tenu du Corolaire 2.2 il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H) - N_{L_2}^{L'}(f, H)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Soit  $C_1$  la constante de l'assertion du Corolaire 2.2(c) et soit  $L_\varepsilon \geq \varepsilon/(4C_1)$ . Alors pour obtenir (3.7) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]}^{L'}(f, H) - N_{[L_2]}^{L'}(f, H)| < \varepsilon/2. \quad (3.8)$$

Par définition de  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $c_{\varepsilon,k} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  tels que l'on ait

$$|u_0^{L'}(z) - u_\varepsilon^{L'}(z)| < \varepsilon/8 \quad (3.9)$$

avec

$$u_\varepsilon^{L'}(z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} e^{iz\gamma_{\varepsilon,k}}. \quad (3.10)$$

Alors il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction

$$N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} u_\varepsilon^{L'}(y_1) \quad (3.11)$$

possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$ . En effet, la condition de Cauchy pour  $L \rightarrow N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H)$  assure l'existence de  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon,[L_2]}^{L'}(f, H) - N_{\varepsilon,[L_1]}^{L'}(f, H)| < \varepsilon/4 \quad (3.12)$$

et (3.9) permet d'estimer

$$|N_{[L]}^{L'}(f, H) - N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f, H)| \leq \varepsilon/8 \quad (3.13)$$

pour  $L = L_1$  et  $L = L_2$ , donc l'inégalité triangulaire implique (3.8).

Il reste à justifier que pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}$  la fonction

$$L \rightarrow N_{[L]}(\gamma) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}} e^{iy_1 \gamma} \quad (3.14)$$

possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$ . Cependant dans le cas  $\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$ , l'assertion est évidente car

$$|1 - N_{[L]}(\gamma)| = |1 - (2[L])^{-d_1} \text{card } \llbracket -L; L \rrbracket^{d_1}| \leq C/L \rightarrow 0 \quad \text{quand } L \rightarrow \infty.$$

Il reste à étudier le cas  $\gamma = (\gamma(1), \dots, \gamma(d_1)) \notin 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$ . Si  $j_0 \in \{1, \dots, d\}$  est tel que  $\gamma(j_0) \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , alors utilisant

$$\left| \sum_{\nu=-L}^{L-1} e^{i\nu\gamma(j_0)} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\gamma(j_0)} - 1|} \quad (3.15)$$

et  $|N_{[L]}(\gamma)| = \prod_{j=1}^{d_1} \left| \frac{1}{2[L]} \sum_{\nu=-L}^{L-1} e^{i\nu\gamma(j)} \right| \leq 2L^{-1} |e^{i\gamma(j_0)} - 1|^{-1} \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

Avant de commencer la preuve de Proposition 3.1 on va introduire des notations auxiliaires. Si  $\mathcal{A}$  est un espace de Banach, alors  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  désigne l'ensemble des applications  $\Phi : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathcal{A}$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}$  ( $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi(z) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}}\|_{\mathcal{A}} < \varepsilon. \quad (3.16)$$

On remarque que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  est un espace de Banach avec la norme

$$\|\Phi\|_{\infty} = \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi(z)\|_{\mathcal{A}}. \quad (3.17)$$

**Lemme 3.2** *Si  $V_z$  est donné par (3.1'), alors la fonction  $z \rightarrow V_z$  appartient à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$ .*

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors on a  $\|V - V_{0,\varepsilon}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$  avec  $V^{0,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V_{\varepsilon,k}$ , où  $V_{\varepsilon,k}$  désigne l'opérateur de multiplication par  $v_{\varepsilon,k}(x) = e^{i\gamma_{\varepsilon,k} \cdot x_1} \tilde{v}_{\varepsilon,k}(x_2)$  comme dans la Section 2. Alors

$$V_{z,\varepsilon} = T_{(z,0)}^{-1} V_{0,\varepsilon} T_{(z,0)} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}} \quad (3.17)$$

et on a  $\|V_z - V_{z,\varepsilon}\|_{\mathcal{B}} = \|T_{(z,0)}^{-1}(V - V_{0,\varepsilon})T_{(z,0)}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ .  $\triangle$

**Lemme 3.3** *Soit  $p \geq 1$ . Alors  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal bilatéral de l'algèbre de Banach  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$ . Si  $\Phi_j \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_{p_j})$  pour  $j = 1, 2$ , alors on a  $\Phi_1 \Phi_2 \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  avec  $p = p_1 p_2 / (p_1 + p_2)$ .*

*Preuve.* Si  $\Phi_j \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_{p_j})$  et  $\varepsilon > 0$ , alors on peut trouver  $N(\varepsilon)$  et  $A_{\varepsilon,k,j} \in \mathcal{B}_{p_j}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k,j} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\Phi_{\varepsilon,j}(z) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k,j} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k,j}} \quad (3.18)$$

vérifie  $\|\Phi_j(z) - \Phi_{\varepsilon,j}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_j}} < \varepsilon(1 + \|\Phi_1\|_{\infty} + \|\Phi_2\|_{\infty})^{-1}$ . Puisque

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \implies \|A_{\varepsilon,k,1} A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_{p_2}}, \quad (3.19)$$

on peut trouver  $N_\varepsilon$  et  $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}_p$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 1, \dots, N_\varepsilon$ ) tels que

$$\Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z) = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} A_{\varepsilon,k} e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon,k}} \quad (3.18')$$

et on peut estimer  $\|\Phi_1(z)\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z)\|_{\mathcal{B}_p}$  par

$$\begin{aligned} & \|(\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z))\Phi_2(z)\|_{\mathcal{B}_p} + \|\Phi_{\varepsilon,1}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z))\|_{\mathcal{B}_p} \leq \\ & \|\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|\Phi_2(z)\|_{\mathcal{B}_{p_2}} + \|\Phi_{\varepsilon,1}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_1}} \|\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z)\|_{\mathcal{B}_{p_2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit  $\Phi_1\Phi_2 \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  et il est évident qu'en remplaçant  $\mathcal{B}_{p_j}$  par  $\mathcal{B}$  dans ce raisonnement on trouve que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B})$  est une algèbre. Enfin utilisant le raisonnement analogue avec

$$\|A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \quad (3.20)$$

on trouve que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal à gauche et pareillement

$$\|A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|A_{\varepsilon,k,1}\|_{\mathcal{B}_p} \|A_{\varepsilon,k',2}\|_{\mathcal{B}} \quad (3.20')$$

permet de trouver que  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{B}_p)$  est un idéal à droite.  $\triangle$

On utilisera le résultat suivant

**Proposition 3.4** *Soit  $\lambda_0 \geq 1 + 2\|V\|_{\mathcal{B}}$  et pour  $m \in \mathbb{N}^*$  on pose*

$$R_z^m = (-\Delta + V_z + \lambda_0 I)^{-m}, \quad (R_z^h)^m = (-\Delta^h + V_z^h + \lambda_0 I)^{-m}. \quad (3.21)$$

*Si  $p \geq \max\{m, 1 + \frac{d}{2}\}$  et  $N \in \mathbb{N}$ , alors on peut trouver des constantes  $C_{N,m} > 0$  telles que l'on ait*

$$\|\chi_y R_z^m\|_{\mathcal{B}_{p/m}} + \|\chi_y^h (R_z^h)^m\|_{\mathcal{B}_{p/m}^h} \leq C_{0,m}, \quad (3.22)$$

$$\|\chi_y R_z^m \chi_{y'}\|_{\mathcal{B}_{p/m}} + \|\chi_y^h (R_z^h)^m \chi_{y'}^h\|_{\mathcal{B}_{p/m}^h} \leq C_{N,m} (1 + |y - y'|)^{-N} \quad (3.22')$$

*pour tout  $y, y' \in \mathbb{Z}^d$  et  $0 < h \leq 1$ .*

La preuve de la Proposition 3.4 sera détaillée dans le Chapitre 3.

Preuve de la Proposition 3.1.

On fixe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $m_0 \geq 1 + \frac{d}{2}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors le théorème de Weierstrass permet de trouver un polynôme d'une variable réelle,  $g_\varepsilon(s) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} s^k$ , tel que

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0/2} \left| (\lambda + \lambda_0)^{m_0} f(\lambda) - g_\varepsilon \left( (\lambda + \lambda_0)^{-1} \right) \right| < \varepsilon / C_{0,m_0}, \quad (3.23)$$

où  $C_{0,m_0}$  est la constante de la formule (3.22). En posant  $f_\varepsilon(\lambda) = (\lambda + \lambda_0)^{-m_0} g_\varepsilon((\lambda + \lambda_0)^{-1})$  on obtient

$$\lambda \geq \lambda_0/2 \Rightarrow \pm (f(\lambda) - f_\varepsilon(\lambda)) \leq \varepsilon (\lambda + \lambda_0)^{-m_0} / C_{0,m_0},$$

donc

$$\pm \operatorname{tr} \chi_y (f(H_z) - f_\varepsilon(H_z)) \chi_y \leq \frac{\varepsilon}{C_{0,m_0}} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0} \chi_y < \varepsilon. \quad (3.24)$$

Ainsi il suffit de prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$  la fonction

$$z \rightarrow \operatorname{tr} \chi_y f_\varepsilon(H_z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0+k}$$

appartient à  $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ . Pour cela on va montrer que les fonctions  $z \rightarrow \Phi_{y,m}(z) = \chi_y R_z^m$  appartiennent à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_1)$  pour  $m \geq m_0$ . Plus précisément on va établir

$$p \geq \max\{m, 1 + \frac{d}{2}\} \Rightarrow \Phi_{y,m} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/m}) \quad (3.25(m))$$

par récurrence par rapport à  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On commence par  $m = 1$ . On pose  $R = (-\Delta + \lambda_0 I)^{-1}$  et

$$\Phi_{y,1,N}(z) = \chi_y R \sum_{k=0}^N (-V_z R)^k. \quad (3.26)$$

Puisque  $\|V_z R\|_{\mathcal{B}} \leq 1/2$  on peut écrire

$$\Phi_{y,1}(z) = \chi_y R (I + V_z R)^{-1} = \chi_y R \sum_{k=0}^{\infty} (-V_z R)^k \quad (3.27)$$

et on trouve

$$\|\Phi_{y,1}(z) - \Phi_{y,1,N}(z)\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|\chi_y R\|_{\mathcal{B}_p} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|V_z R\|_{\mathcal{B}}^k \leq 2^{-N} \|\chi_y R\|_{\mathcal{B}_p}. \quad (3.28)$$

Ainsi pour montrer (3.25(1)) il suffit de savoir que  $\Phi_{y,1,N} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$ . Mais les fonctions  $z \rightarrow (V_z R)^k$  appartiennent à  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B})$  et  $\chi_y R \in \mathcal{B}_p$ , donc il est clair que  $\Phi_{y,1,N} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$ .

Utilisant le raisonnement par récurrence on suppose que l'assertion (3.25(m)) est vraie pour un certain  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors le Lemme 3.3 assure que

$$\Phi_{y,m+1,N} = \sum_{y' \in \llbracket -N; N \rrbracket^d} \Phi_{y,1,N} \Phi_{y',m} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$$

et utilisant Proposition 3.4 on peut estimer

$$\begin{aligned} N' > N &\Rightarrow \|\Phi_{y,m+1,N'}(z) - \Phi_{y,m+1,N}(z)\|_{\mathcal{B}_{p/(m+1)}} \leq \\ &\sum_{y' \in \llbracket -N'; N' \rrbracket^d \setminus \llbracket -N; N \rrbracket^d} \|\chi_y R_z \chi_{y'}\|_{\mathcal{B}_p} \|\chi_{y'} R_z^m\|_{\mathcal{B}_{p/(m+1)}} \\ &\leq \sum_{y' \in \mathbb{Z}^d \setminus \llbracket -N; N \rrbracket^d} C(1 + |y - y'|)^{-d-1} \leq C'/N, \end{aligned}$$

donc  $\Phi_{y,m+1}$  est la limite de la suite  $(\Phi_{y,m+1,N})_{N \in \mathbb{N}}$  dans  $C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$ .  $\triangle$

**Proposition 3.5** Soient  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $L' \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$  et  $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ . On pose

$$u_{\rho,y_1}^{h,L'}(z) = \text{tr}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_z^h) - f(-\Delta^h)), \quad (3.29)$$

où  $\chi_{\rho,y_1}^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$  est défini par la formule

$$(\chi_{\rho,y_1}^{h,L'} \varphi)(hn_1, hn_2) = \sum_{y_2 \in \llbracket -L'; L' \rrbracket^{d_2}} \chi_{C(y_1,y_2)}(hn_1/\rho, hn_2) \varphi(hn_1, hn_2) \quad (3.30)$$

pour  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$  et  $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ .

Si  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho \in [\frac{1}{2}; 1]$  alors on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$  ( $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \left| u_{\rho,0}^{h,L'}(z) - \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} e^{iz\gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon/8, \quad (3.31)$$

$$\sup_{0 < h \leq 1} |c_{\varepsilon,k}^{h,\rho}| < \infty. \quad (3.31')$$

Preuve du fait que Proposition 3.5 implique Théorème 1.2

Au début on observe que pour  $\rho \in h\mathbb{N}, y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$  on peut écrire

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \text{tr}^h T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_{\rho y_1}^h) - f(-\Delta^h)) T_{(-\rho y_1,0)}^h, \quad (3.32)$$

où  $T_{(\rho y_1,0)}^h$  est l'opérateur de la translation,

$$(T_{(\rho y_1,0)}^h \varphi)(hn) = \varphi(hn_1 - \rho y_1, hn_2) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (3.33)$$

Compte tenu de

$$T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,0}^{h,L'} T_{(-\rho y_1,0)}^h = \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}, \quad T_{(\rho y_1,0)}^h H_{\rho y_1}^h T_{(-\rho y_1,0)}^h = H^h \quad (3.34)$$

on obtient

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \text{tr}^h \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_z^h) - f(-\Delta^h)). \quad (3.35)$$

En introduisant la notation  $[L]_\rho = \rho[L/\rho]$  on trouve

$$\sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} \chi_{\rho,y_1}^{h,L'} = \chi_{[L]_\rho}^{h,L'} \quad (3.36)$$

et par conséquent

$$(2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = N_{[L]_\rho}^{L'}(f, H^h). \quad (3.37)$$

Compte tenu du Corollaire 2.2 il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $L_\varepsilon > 0$  tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H^h) - N_{L_2}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon. \quad (3.38)$$

Choisissant  $L_\varepsilon$  assez grand et utilisant Corollaire 2.2(c) on voit que pour obtenir (3.38) il suffit de montrer que pour un choix convenable de  $\rho(h, \varepsilon) \in [1/2; 1] \cap h\mathbb{N}$  on ait

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{[L_2]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon/2. \quad (3.39)$$

Soient  $c_{\varepsilon, k}^{h, \rho}$ ,  $\gamma_{\varepsilon, k}$  choisis comme dans la Proposition 3.5 et

$$N_{\varepsilon, L}^{h, \rho} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon, k}^{h, \rho} N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon, k}), \quad (3.40)$$

où

$$N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon, k}) = (2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in \llbracket -L/\rho; L/\rho \rrbracket^{d_1}} e^{i\rho y_1 \gamma_{\varepsilon, k}}. \quad (3.40')$$

Alors (3.31) avec  $\rho = \rho(h, \varepsilon)$  assure

$$|N_{[L]_{\rho(h, \varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{\varepsilon, L}^{h, \rho(h, \varepsilon)}| < \varepsilon/8 \quad (3.41)$$

et pour obtenir (3.39) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon, L_1}^{h, \rho(h, \varepsilon)} - N_{\varepsilon, L_2}^{h, \rho(h, \varepsilon)}| < \varepsilon/4. \quad (3.42)$$

Ainsi il suffit de prouver que (3.40') possède une limite quand  $L \rightarrow \infty$  et le fait que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $h_\varepsilon > 0$ ,  $C_\varepsilon$  tels que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k}) - \lim_{L \rightarrow \infty} N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k}) \right| \leq C_\varepsilon/L. \quad (3.43(k)).$$

On peut supposer  $\gamma_{\varepsilon, 0} = 0$  (avec la possibilité d'avoir  $c_{\varepsilon, 0}^h = 0$ ) et  $\gamma_{\varepsilon, k} \neq 0$  pour  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ . Alors (3.43(0)) est évident et pour démontrer (3.43(k)) avec  $k \geq 1$  on pose

$$d_\varepsilon(t) = \inf_{1 \leq k \leq N(\varepsilon)} \text{dist}(t\gamma_{\varepsilon, k}, 2\pi\mathbb{Z}^d) \quad \text{pour } t > 0. \quad (3.44)$$

Alors la fonction  $t \rightarrow d_\varepsilon(t)$  est continue et  $\{t \in \mathbb{R} : d_\varepsilon(t) = 0\}$  est discret. Ainsi on peut trouver  $t(\varepsilon) \in [1/2; 3/4]$  tel que  $d_\varepsilon(t) > 0$  et  $h(\varepsilon) > 0$  tel que  $t(\varepsilon) \leq t \leq t(\varepsilon) + h(\varepsilon) \Rightarrow d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$ , donc il existe  $\rho(h, \varepsilon) \in [1/2; 1] \cap h\mathbb{N}$  tel



que  $d_\varepsilon(\rho(h, \varepsilon)) \geq d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$ . Pareillement comme au début de cette section on peut estimer

$$|N_L^{\rho(h, \varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon, k})| \leq 2L^{-1} |e^{id_\varepsilon(t(\varepsilon))/2} - 1|^{-1}. \quad (3.45)$$

Ainsi on a démontré que Théorème 1.2 résulte de Proposition 3.5.  $\triangle$

*Preuve de la Proposition 3.5* Soit  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^h)_{0 < h \leq 1}$  une famille d'espaces de Banach  $\mathcal{A}^h$ . Alors on écrira  $\Phi \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; \mathcal{A})$  si et seulement si  $\Phi = (\Phi^h)_{0 < h \leq 1}$  est une famille d'applications  $\Phi^h : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathcal{A}^h$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon, k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $A_{\varepsilon, k}^h \in \mathcal{A}^h$  ( $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ ) tels que

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \|\Phi^h(z) - \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon, k}^h e^{iz \cdot \gamma_{\varepsilon, k}}\|_{\mathcal{A}^h} < \varepsilon \quad (3.46)$$

et  $\sup_{0 < h \leq 1} \|A_{\varepsilon, k}^h\|_{\mathcal{A}^h} < \infty$  pour  $k = 0, \dots, N(\varepsilon)$ .

Alors il est clair que  $(z \rightarrow V_z^h)_{0 < h \leq 1} \in C_{\text{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}; (\mathcal{B}^h)_{0 < h \leq 1})$  et le Lemme 3.3 reste valable également.

Il reste à suivre la preuve de la Proposition 3.2 en remplaçant  $R_z$ ,  $V_z$ ,  $R$ ,  $\mathcal{B}_{p/m}$  par  $(R_z^h)_{0 < h \leq 1}$ ,  $(V_z^h)_{0 < h \leq 1}$ ,  $((-\Delta^h + \lambda_0 I)^{-1})_{0 < h \leq 1}$  et  $(\mathcal{B}_{p/m}^h)_{0 < h \leq 1}$  respectivement.  $\triangle$

## 4 Preuve du Théorème 1.5

On note par  $\mathcal{F}$  l'opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  donné par la formule

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \quad \text{pour } \varphi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) \quad (4.1)$$

et on introduit la bijection isométrique  $\mathcal{F}^h : l^2(h\mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2([-\pi/h; \pi/h]^d)$  par la formule

$$(\mathcal{F}^h \varphi)(\xi) = (h/2\pi)^{d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{ihn \cdot \xi} \varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^d). \quad (4.2)$$

**Lemme 4.1** Soit  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On définit  $\theta^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$  en posant  $\theta^h(hn) = \theta(hn)$  pour  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$\sup_{0 < h \leq 1} \sup_{\xi \in [-\pi/h; \pi/h]^d} h^{d/2} |\xi|^N |(\mathcal{F}^h \theta_h)(\xi)| < \infty. \quad (4.3)$$

*Preuve.* Pour  $N \in \mathbb{N}$  posons  $\theta_N^h = (-\Delta^h)^N \theta^h$ . Il est clair que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |\theta_1^h(hn)| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{1 \leq j \leq d} |\partial_{x_j}^2 \theta(x)| \leq C' \quad (4.4)$$

et plus généralement pour tout  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$C_N = \sup_{0 < h \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |\theta_N^h(hn)| < \infty, \quad (4.4')$$

donc

$$|(\mathcal{F}^h \theta_N^h)(\xi)| \leq (h/2\pi)^{d/2} \sum_{\{n \in \mathbb{Z}^d : hn \in \text{supp } \theta_N^h\}} |\theta_N^h(hn)| \leq C_N h^{-d/2}. \quad (4.5)$$

De l'autre côté on a  $(\mathcal{F}^h \theta_N^h)(\xi) = \vartheta_h(\xi)^N (\mathcal{F}^h \theta^h)(\xi)$  avec

$$\vartheta_h(\xi) = \sum_{j=1}^d \frac{2 - 2 \cos(h\xi_j)}{h^2}. \quad (4.6)$$

Il reste à remarquer que

$$\xi \in [-\pi/h; \pi/h]^d \implies \frac{1}{4} |\xi|^2 \leq \vartheta_h(\xi) \leq |\xi|^2 \quad (4.7)$$

avec (4.5) impliquent (4.3).  $\triangle$

On note par  $J^h$  l'injection isométrique  $L^2([\pi/h; \pi/h]^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ , qui s'obtient en prolongeant les fonctions par la valeur 0 sur  $\mathbb{R}^d \setminus [-\pi/h; \pi/h]^d$ . Alors

$$J^{h*} \varphi = \varphi|_{[-\pi/h; \pi/h]^d} \in L^2([- \pi/h; \pi/h]^d) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad (4.8)$$

est la formule de l'opérateur adjoint à  $J^h$ .

Pour  $T > 0$  on définit  $\chi_T \in \mathcal{B}$  par la formule

$$(\chi_T \varphi)(\xi) = \chi_{[-T; T]^d}(\xi) \varphi(\xi) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (4.9)$$

Ensuite on définit  $P_T \in \mathcal{B}$  et  $P_T^h \in \mathcal{B}^h$  par

$$P_T = \mathcal{F}^* \chi_T \mathcal{F}, \quad P_T^h = (J^h \mathcal{F}^h)^* \chi_T J^h \mathcal{F}^h \quad (4.10)$$

et on remarque que  $T \geq \pi/h \implies P_T^h = I$ .

**Lemme 4.2** Si  $T' \geq 1$  est fixé, alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|(I - P_T) \Theta P_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad (4.11)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 < h \leq 1} \|(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} = 0. \quad (4.11')$$

*Preuve.* Soit  $\tilde{\Theta}_{T,T'}^h \in \mathcal{B}(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))$  défini par

$$\tilde{\Theta}_{T,T'}^h = \mathcal{F}^h(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h (\mathcal{F}^h)^*. \quad (4.12)$$

Alors

$$(\tilde{\Theta}_{T,T'}^h \varphi)(\xi) = \int_{[-\pi/h; \pi/h]^d} K_{T,T'}^h(\xi, \xi') \varphi(\xi') d\xi', \quad (4.12')$$

$$K_{T,T'}^h(\xi, \xi') = (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) (h/2\pi)^{d/2} (\mathcal{F}^h \theta^h)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \quad (4.12'')$$

En vertu du Lemme 4.1 pour  $T > T'$  on peut estimer

$$\begin{aligned} |K_{T,T'}^h(\xi, \xi')| &\leq (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) C_N (1 + |\xi - \xi'|)^{-N} \chi_{[-T'; T']^d}(\xi') \\ &\leq C_N |T - T'|^{-N/2} (1 + |\xi - \xi'|)^{-N/2} \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si  $N > d$  alors on peut estimer

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} |K_{T,T'}^h(\xi, \xi')|^2 d\xi d\xi' \leq \\ &\int_{[-T'; T']^d} d\xi' \int_{[-\pi/h; \pi/h]^d} d\xi C_N^2 |T - T'|^{-N} (1 + |\xi - \xi'|)^{-N} \leq C'_N |T - T'|^{-N} \end{aligned}$$

et pour terminer la preuve de (4.11') on remarque que pour  $T'$  fixé on a

$$\begin{aligned} \|(I - P_T) \Theta^h P_{T'}\|_{\mathcal{B}^h} &= \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))} \\ &\leq \|\tilde{\Theta}_{T,T'}^h\|_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h; \pi/h]^d))} \rightarrow 0 \quad \text{quand } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La preuve de (4.11) est semblable:  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  assure le fait que  $\mathcal{F}\theta$  est à décroissance rapide, c'est-à-dire pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $C_N > 0$  telle que

$$|\mathcal{F}\theta(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \quad (4.14)$$

et définissant l'opérateur  $\tilde{\Theta}_{T,T'} = \mathcal{F}(I - P_T) \Theta P_{T'} \mathcal{F}^*$  on trouve l'expression

$$(\tilde{\Theta}_{T,T'} \varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{T,T'}(\xi, \xi') \varphi(\xi') d\xi', \quad (4.15)$$

$$K_{T,T'}(\xi, \xi') = (1 - \chi_{[-T; T]^d}(\xi)) (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F}\theta)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'), \quad (4.15')$$

permettant d'appliquer le même raisonnement qu'auparavant.  $\triangle$

**Lemme 4.3** *On suppose  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $\Theta, \Theta^h$  comme dans Corollaire 2.4. On pose*

$$\tilde{\Theta} = \mathcal{F}\Theta\mathcal{F}^*, \quad \tilde{\Theta}^h = J^h\mathcal{F}^h\Theta^h(J^h\mathcal{F}^h)^*, \quad (4.16)$$

$$\tilde{V} = \mathcal{F}V\mathcal{F}^*, \quad \tilde{V}^h = J_h\mathcal{F}^hV^h(J^h\mathcal{F}^h)^*. \quad (4.17)$$

*Alors pour tout  $T' > 0$  on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (4.18)$$

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On va montrer qu'il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.19)$$

Mais Lemme 4.2 assure qu'il existe  $T = T(\varepsilon) \geq T'$  tel que

$$\|(I - \chi_T)\tilde{\Theta}\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = \|(I - P_T)\Theta P_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3, \quad (4.20)$$

$$\|(I - \chi_T)\tilde{\Theta}^h\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} = \|(I - P_T^h)\Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3, \quad (4.20')$$

donc pour obtenir (4.18) il suffit de prouver

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3 \quad (4.21)$$

On peut supposer que  $h \leq h_\varepsilon \leq \pi/T \leq \pi T'$ . Alors

$$(\chi_T(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\chi_{T'})\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')\varphi(\xi') d\xi', \quad (4.22)$$

$$\tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi') = (2\pi)^{-d/2} \chi_{[-T; T]^d}(\xi) (h^d \mathcal{F}^h \theta^h - \mathcal{F}\theta)(\xi - \xi') \chi_{[-T'; T']^d}(\xi'). \quad (4.22')$$

Ensuite on remarque que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi') = 0 \text{ pour } \xi, \xi' \in \mathbb{R}^d. \quad (4.23)$$

En effet, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  on a  $h^d \mathcal{F}^h \theta^h(\xi) \rightarrow \mathcal{F}\theta(\xi)$  quand  $h \rightarrow 0$ , parce qu'il s'agit de la suite des sommes de Riemann de l'intégrale de la fonction appartenant à  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Pour terminer la preuve de la première assertion (4.18) on remarque qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que  $|\widetilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')| \leq C_0 \chi_{[-T; T]^{2d}}(\xi, \xi')$ , alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que (4.23) implique

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}}^2 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \|\chi_T(\tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}_2}^2 \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\widetilde{K}_{T,T'}^h(\xi, \xi')|^2 d\xi d\xi' = 0. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de la deuxième assertion (4.18) on doit trouver  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.24)$$

Le Lemme 2.4 assure l'existence de  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ,  $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ ,  $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$  tels que l'on ait  $\|V - V_\varepsilon\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3$  avec

$$V_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes V_{\varepsilon,k},$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1)(x_1) = e^{ix_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(x_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k} \varphi_2)(x_2) = v_{\varepsilon,k}(x_2) \varphi_2(x_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2}).$$

Alors on a également  $\|V^h - V_\varepsilon^h\|_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3$  avec

$$V_\varepsilon^h = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \otimes V_{\varepsilon,k}^h,$$

où  $e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$ ,  $V_{\varepsilon,k}^h \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$  sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}}^h \varphi_1)(hn_1) = e^{ihn_1 \gamma_{\varepsilon,k}} \varphi_1(hn_1) \quad \text{pour } \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k}^h \varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2) \varphi_2(hn_2) \quad \text{pour } \varphi_2 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

Ainsi au lieu de (4.24) il suffit de prouver

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V} - \tilde{V}^h)\chi_{T'}\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3 \quad (4.25)$$

avec

$$\tilde{V}_\varepsilon = \mathcal{F}V_\varepsilon\mathcal{F}^*, \quad \tilde{V}_\varepsilon^h = J^h\mathcal{F}^hV_\varepsilon^h(J^h\mathcal{F}^h)^*.$$

Ensuite on remarque que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , où  $\mathcal{F}_j$  pour  $j = 1, 2$ , est l'opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^{d_j})$  donné par la formule

$$(\mathcal{F}_j\varphi_j)(\xi_j) = (2\pi)^{-d_j/2} \int_{\mathbb{R}^{d_j}} e^{ix_j \cdot \xi_j} \varphi_j(x_j) dx_j \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j})$$

et introduisant  $\tilde{V}_{\varepsilon,k} = \mathcal{F}_2V_{\varepsilon,k}\mathcal{F}_2^*$  on trouve

$$\tilde{V}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h$$

où  $(T_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_2)(x_2) = \varphi_2(x_2 - \gamma_{\varepsilon,k})$  pour  $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2})$ .

De manière analogue  $\mathcal{F}^h = \mathcal{F}_1^h \otimes \mathcal{F}_2^h$  avec  $\mathcal{F}_j^h : l^2(h\mathbb{Z}^{d_j}) \rightarrow L^2([-\pi/h; \pi/h]^{d_j})$  pour  $j = 1, 2$ , est donné par la formule

$$(\mathcal{F}_j^h\varphi_j)(\xi_j) = (h/2\pi)^{d_j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^{d_j}} e^{ihn_j \cdot \xi_j} \varphi_j(hn_j) \quad \text{pour } f_j \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^{d_j})$$

et introduisant  $\tilde{V}_{\varepsilon,k}^h = J^h\mathcal{F}_2^hV_{\varepsilon,k}^h(J^h\mathcal{F}_2^h)^*$  on trouve que pour  $h \leq \pi/T$  on a

$$\tilde{V}_\varepsilon^h\chi_T = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}}\chi_T^{(1)} \otimes \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h\chi_T^{(2)}$$

où  $\chi_T^{(j)} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_j}))$  avec  $j = 1, 2$ , est donné par la formule

$$(\chi_T^{(j)}\varphi_j)(x_j) = \chi_{[-T; T]^{d_j}}(x_j)\varphi_j(x_j) \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j}).$$

Cependant la démonstration de la partie (a) donne également

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\tilde{V}_{\varepsilon,k} - \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))} = 0 \quad (4.26)$$

et compte tenu de

$$(\tilde{V}_\varepsilon - \tilde{V}_\varepsilon^h)\chi_T = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}}\chi_T^{(1)} \otimes (\tilde{V}_{\varepsilon,k} - \tilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)}$$

il est clair que (4.25) résulte de (4.26).  $\triangle$

**Lemme 4.4** *Soit  $\lambda_0 \geq 1 + 2\|V\|$  et posons*

$$R = (-\Delta + V + \lambda_0 I)^{-1}, \quad R^h = (-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{R} = \mathcal{F} R \mathcal{F}^*, \quad \tilde{R}^h = J^h \mathcal{F}^h V^h (J^h \mathcal{F})^*. \quad (4.28)$$

Alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0$ .

*Preuve.* Compte tenu de les expressions

$$R = \tilde{R}_\circ \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{V} \tilde{R}_\circ)^k, \quad R^h = \tilde{R}_\circ^h \sum_{k=0}^{\infty} (-\tilde{V}^h \tilde{R}_\circ^h)^k,$$

où on a désigné

$$\tilde{R}_\circ = \mathcal{F}(-\Delta + \lambda_0 I)^{-1} \mathcal{F}^*, \quad \tilde{R}_\circ^h = J^h \mathcal{F}^h (-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1} (J^h \mathcal{F})^*,$$

il suffit de montrer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{V} \tilde{R} - \tilde{V}^h \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (4.29)$$

D'abord on montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{R} - \tilde{R}^h\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.30)$$

Cependant

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_\circ \varphi)(\xi) &= (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1} \varphi(\xi), \\ (\tilde{R}_\circ^h \varphi)(\xi) &= \chi_{[-\pi/h; \pi/h]^d}(\xi) (\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1} \varphi(\xi), \end{aligned}$$

où  $\vartheta_h$  est donné par (4.6) et on remarque qu'il existe  $C_0 > 0$  tel que

$$\|(I - \chi_T) \tilde{R}_\circ\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus [-T; T]^d} (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1} \leq C_0 T^{-2}, \quad (4.31)$$

$$h \leq \pi/T \Rightarrow \|(I - \chi_T) \tilde{R}_\circ^h\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus [-T; T]^d} (\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1} \leq C_0 T^{-2}, \quad (4.31')$$

où la dernière estimation résulte de (4.7). Pour justifier (4.30) il suffit de choisir  $T$  tel que  $C_0 T^{-2} < \varepsilon/4$  et utiliser le fait que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\xi \in [-T; T]^d} |\vartheta_h(\xi) - |\xi|^2| = 0. \quad (4.32)$$

Il reste à montrer l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{V}^h \tilde{R}_o - \tilde{V} \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \quad (4.33)$$

Soit  $T$  tel que  $2\|V\|_{\mathcal{B}} C_0 T^{-2} < \varepsilon/4$ . Si  $h_\varepsilon > 0$  est suffisamment petit, alors

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|\tilde{V}^h(\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o)\|_{\mathcal{B}} \leq \|V\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4 \quad (4.34)$$

et compte tenu du Lemme 2.3,

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \|(\tilde{V}^h - \tilde{V})\chi_T\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4. \quad (4.35)$$

Pour obtenir (4.33) on estime

$$\|\tilde{V}^h \tilde{R}_o - \tilde{V} \tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} \leq \|\tilde{V}^h(\tilde{R}_o^h - \tilde{R}_o)\|_{\mathcal{B}} +$$

$$\|(\tilde{V}^h - \tilde{V})\chi_T\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}} + \|\tilde{V}^h - \tilde{V}\|_{\mathcal{B}} \|(I - \chi_T)\tilde{R}_o\|_{\mathcal{B}}$$

et (4.34), (4.35) permettent de majorer la dernière expression par  $\frac{3}{4}\varepsilon + 2\|V\|_{\mathcal{B}} C_0 T^{-2} < \varepsilon$ .  $\triangle$

**Lemme 4.5** *Pour démontrer Théorème 1.5 il suffit de montrer que l'on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{tr}^h P_T^h \Theta^h (R^h)^m \Theta^h = \text{tr} P_T \Theta R^m \Theta. \quad (4.36)$$

pour tout  $T \geq 1$  et  $m \geq 2 + \frac{d}{2}$ .

*Preuve.* Compte tenu du Corollaire 2.3 il faut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il est possible de trouver  $h_\varepsilon > 0$  tel que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| \text{tr}^h \Theta^h f(H^h) \Theta^h - \text{tr} \Theta f(H) \Theta \right| < \varepsilon. \quad (4.37)$$

D'abord on va montrer qu'il existe  $T(\varepsilon)$  tel que pour  $T \geq T(\varepsilon)$  on a

$$\|(I - P_T^h) \Theta^h f(H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} < \varepsilon/4. \quad (4.38)$$

En effet, le membre gauche de (4.38) est majoré par  $\zeta_1(h) + \zeta_2(h)$  avec

$$\zeta_1(h) = \|(I - P_T^h) \Theta^h P_{T'}^h\|_{\mathcal{B}^h} \|f(H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h},$$



$$\zeta_2(h) = \|\Theta^h(I - P_{T'}^h)(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}\|_{\mathcal{B}^h} \|(\lambda_0 I - \Delta^h)R^h\|_{\mathcal{B}^h} \|g(H^h)\Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h}$$

où on a noté  $g(\lambda) = (\lambda_0 + \lambda)f(\lambda)$ . Puisque

$$\|(I - P_{T'}^h)(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}\|_{\mathcal{B}^h} = \sup_{\xi \in [-\pi/h; \pi/h]^d \setminus [-T'; T']^d} |\lambda_0 + \vartheta_h(\xi)|^{-1} \leq CT'^{-2},$$

on peut choisir  $T'$  suffisamment grand pour assurer  $\zeta_2(h) < \varepsilon/8$  pour tout  $h \in ]0; 1]$  et ensuite Lemme 4.2 permet de choisir  $T$  suffisamment grand pour assurer  $\zeta_1(h) < \varepsilon/8$  pour tout  $h \in ]0; 1]$ .

De manière analogue il est possible de trouver  $T(\varepsilon)$  tel que

$$T \geq T(\varepsilon) \Rightarrow \|(I - P_T)\Theta f(H)\Theta\|_{\mathcal{B}_1} < \varepsilon/4. \quad (4.39)$$

Dans le deuxième pas on considère une approximation de  $f$  par  $(f_{\varepsilon'})_{\varepsilon' > 0}$  comme dans la démonstration de Proposition 3.1. Alors il existe  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon' > 0$ ,

$$\|P_T^h \Theta^h (f - f_{\varepsilon'}) (H^h) \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq \varepsilon' \|(R^h)^m \Theta^h\|_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_0 \varepsilon',$$

$$|\mathrm{tr} P_T \Theta (f - f_{\varepsilon'}) (H) \Theta| \leq \varepsilon' \|(R^h)^m \Theta\|_{\mathcal{B}_1} \leq C_0 \varepsilon'.$$

Soit  $\varepsilon' = \varepsilon/(8C_0)$ . Alors (4.37) résulte de

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| \mathrm{tr}^h P_T^h \Theta^h f_{\varepsilon'} (H^h) \Theta^h - \mathrm{tr} P_T \Theta f_{\varepsilon'} (H) \Theta \right| < \varepsilon/4 \quad (4.40)$$

et on termine la démonstration en observant que (4.36) assure l'existence de  $h_\varepsilon > 0$  tel que (4.40) soit satisfaite.  $\triangle$

#### Preuve du Théorème 1.5

La démonstration est basée sur les égalités

$$\mathrm{tr} P_T \Theta R^m \Theta P_T = \mathrm{tr} \chi_T \tilde{\Theta} \tilde{R}^m \tilde{\Theta} \chi_T,$$

$$\mathrm{tr}^h P_T^h \Theta^h (R^h)^m \Theta^h P_T^h = \mathrm{tr} \chi_T \tilde{\Theta}^h (\tilde{R}^h)^m \tilde{\Theta}^h \chi_T,$$

qui permettent d'écrire (4.36) sous la forme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathrm{tr} \chi_T \left( \tilde{\Theta}^h (\tilde{R}^h)^m \tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta} \tilde{R}^m \tilde{\Theta} \right) \chi_T = 0. \quad (4.41)$$

Pour démontrer (4.41) on remarque que

$$\|\chi_T(\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^m\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta}\tilde{R}^m\tilde{\Theta})\chi_T\|_{\mathcal{B}_1} \leq \zeta_1(h) + \zeta_2(h) + \zeta_3(h)$$

avec

$$\begin{aligned}\zeta_1(h) &= \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^m\|_{\mathcal{B}_1} \|(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\chi_T\|_{\mathcal{B}}, \\ \zeta_2(h) &= \|\tilde{\Theta}^h((\tilde{R}^h)^m - \tilde{R}^m)\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_1}, \\ \zeta_3(h) &= \|\chi_T(\tilde{\Theta}^h - \tilde{\Theta})\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}^m\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_1}.\end{aligned}$$

En utilisant

$$(\tilde{R}^h)^m - \tilde{R}^m = \sum_{m'=1}^m (\tilde{R}^h)^{m'-1}(\tilde{R}^h - \tilde{R})\tilde{R}^{m-m'}$$

on peut estimer

$$\zeta_2(h) \leq \sum_{m'=1}^m \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} \|\tilde{R}^h - \tilde{R}\|_{\mathcal{B}} \|\tilde{R}^{m-m'}\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}}$$

avec la convention que l'on utilise la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  au lieu de  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}}$  dans le cas  $m' = 1$  et au lieu de  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}}$  dans le cas  $m' = m$ . Compte tenu du Lemme 2.2 du Chapitre 3 on a

$$\sup_{0 < h \leq 1} \|\tilde{\Theta}^h(\tilde{R}^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} = \sup_{0 < h \leq 1} \|\Theta^h(R^h)^{m'-1}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} < \infty,$$

et de manière analogue on a

$$\|\tilde{R}^{m-m'}\tilde{\Theta}\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} = \|R^{m-m'}\Theta\|_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} < \infty.$$

Ainsi utilisant le Lemme 4.5 on trouve  $\lim_{h \rightarrow 0} \zeta_2(h) = 0$ . Pour terminer la démonstration on remarque de manière analogue que  $\lim_{h \rightarrow 0} \zeta_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \zeta_3(h) = 0$  résulte de Lemme 4.2.  $\triangle$